EXERCICE 1.1 TD1 : Caractéristiques, ondes de détente ou de choc

Caractéristiques d'un modèle de trafic routier

On considère le modèle de trafic routier adimensionné $\frac{d}{dT}\int_{X_1}^{X_2} R(X,T)\,dX + [Q(X,T)]_{X_1}^{X_2} = 0$ avec $0 \le R \le 1$, $V(R) = 1 - R$ et $Q(R) = R\,V = R - R^2$.

1) Interpréter brièvement les grandeurs R, Q et V dans le cadre d'un modèle de trafic routier. Tracer la fonction $Q(R)$.
2) Dans le cas où $R(X,T)$ est dérivable, montrer que $\frac{\partial R}{\partial T} + C(R)\,\frac{\partial R}{\partial X} = 0$ avec $C(R) = Q'(R)$. Tracer sur un même graphe les fonctions $V(R)$ et $C(R)$.
3) On considère le changement de variable $R(X,T) = R_e + \widetilde{R}(X,T)$ où $R_e \in [0,1]$ est une valeur constante et $\widetilde{R}$ une petite perturbation. Écrire l'équation vérifiée par $\widetilde{R}$ au premier ordre. Discuter le sens de propagation d'une petite perturbation en fonction de R_e.
4) On suppose que $\widetilde{R}(X,0) = \widetilde{R}_0(X)$ est connu. Écrire les équations des demi-droites le long desquelles $\widetilde{R}(X,T)$ reste constant. Les tracer dans le demi-plan $(X, T \ge 0)$.

Ondes de détente

On considère la condition initiale $R(X,0) = R_0(X)$ du modèle telle que $R_0(A) = \frac{1}{2}$ pour $A \le 0$, $R_0(A) = \frac{1}{2} - A$ pour $A \in [0, \frac{1}{2}]$ et $R_0(A) = 0$ pour $A \ge \frac{1}{2}$.

5) Tracer le profil $R_0(A)$. Écrire l'équation des caractéristiques associées à cette condition initiale. Les tracer dans le demi-plan $(X, T \ge 0)$.
6) Montrer que la solution $R(X,T)$ vérifie $R(X,T) = R_0(A)$ avec $X = A + C[R_0(A)]\,T$. Résoudre cette équation implicite et tracer le profil spatial $R(X,T)$ pour plusieurs temps T.

Onde de détente centrée

On considère la condition initiale $R(X,0) = R_0(X)$ du modèle telle que $R_0(A) = R_1$ pour $A \le 0$ et $R_0(A) = R_2$ pour $A \ge 0$. On suppose que $R_1 > R_2$.

7) Tracer le profil $R_0(A)$. Écrire l'équation des caractéristiques associées à cette condition initiale. Les tracer dans le demi-plan $(X, T \ge 0)$.
8) Montrer que la solution s'écrit $R(X,T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,X/T$ pour $X \in [L_1(T), L_2(T)]$ où $L_1(T)$ et $L_2(T)$ sont des fonctions que l'on déterminera. Tracer le profil $R(X,T)$ pour différents T.

Onde de choc centrée

On considère la condition initiale $R(X,0) = R_0(X)$ du modèle telle que $R_0(A) = R_1$ pour $A \le 0$ et $R_0(A) = R_2$ pour $A \ge 0$. On suppose maintenant que $R_1 < R_2$.

9) Tracer le profil $R_0(A)$. Écrire l'équation des caractéristiques associées à cette condition initiale. Peut-on les tracer dans le demi-plan $(X, T \ge 0)$? Commenter.
10) Calculer la vitesse W du choc en admettant son expression $W = [\![Q]\!]/[\![R]\!]$ où $[\![\bullet]\!] = \bullet^+ - \bullet^-$ désigne le saut d'une grandeur $\bullet$ à travers le choc. Tracer la trajectoire du choc dans le demi-plan ainsi que les droites caractéristiques.
11) Tracer les trajectoires des véhicules.

Condition initiale quelconque

On considère une condition initiale quelconque $R(X,0) = R_0(X)$ dérivable en X.

12) Montrer que $R(X,T)$ vérifie $R(X,T) = R_0(A)$ où $A(X,T)$ est solution de l'équation implicite $X = A + C[R_0(A)]\,T$ pour T suffisamment petit.
13) Cette solution est-elle valable pour tout temps ? Commentez !

EXERCICE 1.2 TD2 : Ondes dans les cordes et les tubes

Corde tendue homogène

On considère l'équation des ondes 1D $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ où $y(x,t)$ est le petit déplacement transversal d'une corde tendue de masse linéique ρ et de tension T. On s'intéresse alors à l'évolution d'une condition initale $y(x,0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$ où y_0 et v_0 sont des fonctions connues.

1) Exprimer c en fonction de ρ et T.
2) Écrire la solution $y(x,t)$ de l'équation de D'Alembert en fonction de y_0 et v_0.
3) On suppose $y_0(x) = \frac{1}{2}\, e^{-x^2}$ et $v_0(x) = c\, x\, e^{-x^2}$. Calculer et tracer la solution $\phi(x,t)$ pour plusieurs valeurs de t.
4) On suppose $y_0(x) = e^{-x^2}$ et $v_0(x) = 0$. Calculer et tracer la solution $y(x,t)$ pour plusieurs valeurs de t. Interpréter.

Corde tendue avec une discontinuité

On suppose que la densité de la corde est ρ_1 pour $x < 0$ et ρ_2 pour $x > 0$. On s'intéresse à des solutions de la forme $y(x,t) = f_I(x - c_1\, t) + f_R(x + c_1\, t)$ pour $x < 0$ et $y(x,t) = f_T(x - c_2\, t)$ pour $x > 0$.

5) Justifier que la tension T est constante dans toute la corde et exprimer c_1 et c_2.
6) Interpréter physiquement les conditions de raccord $y^-(0,t) = y^+(0,t)$ et $\frac{\partial y}{\partial x}^-(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}^+(0,t)$.
7) Interpréter la forme des solutions recherchées.
8) Montrer que $f_T(x - c_2\, t) = T\, f_I[\beta_T\, (x - c_2\, t)]$ et $f_R(x + c_1\, t) = -R\, f_I[\beta_R\, (x + c_1\, t)]$ où β_T, β_R, T et R sont des constantes que l'on déterminera.
9) Montrer que $T + R = 1$. Interpréter.
10) Examiner les cas $\rho_1 \ll \rho_2$ puis $\rho_1 \gg \rho_2$.

Guide d'ondes accoustique

On considère l'équation des ondes 2D $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ où $\phi(x,t)$ est le potentiel des vitesses d'un écoulement compressible, adiabatique correspondant à des petites oscillations. On suppose que sa pression et sa masse volumique au repos sont respectivement p_0 et ρ_0.

11) Exprimer la vitesse du son c en fonction de p_0 et ρ_0. En déduire sa valeur dans l'air.

On considère une couche fluide compressible comprise entre deux murs d'équations $x = 0$ et $x = d$. On cherche des solutions de la forme $\phi = A\, e^{i\omega\left(t - \sin\theta_I\, \frac{z}{c} + \cos\theta_I\, \frac{x}{c}\right)} + A\, e^{i\omega\left(t - \sin\theta_I\, \frac{z}{c} - \cos\theta_I\, \frac{x}{c}\right)}$ où $\phi(x,z,t)$ est le potentiel des vitesses.

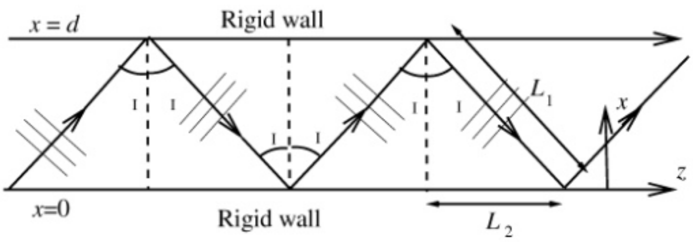

Fig. 3.4. Plane waves zig-zagging along a planar waveguide.

12) Représenter graphiquement les deux ondes planes qui constituent ϕ. Interpréter θ_I.
13) Montrer que l'on a $\cos\theta_I = \frac{n\pi c}{\omega d}$ pour $n = 0, 1, 2, ..., n_{\max}$ avec $n_{\max} \le \frac{\omega d}{\pi c}$.
14) Montrer que les modes sont de la forme $\phi = 2A\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\, e^{i(\omega t - kz)}$ où k et ω sont liés par une relation que l'on précisera. Représenter graphiquement ces modes.
15) Montrer que $k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}}$ pour ω fixé et $\omega_n = c\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2}} \ge \frac{\pi c}{d}$ pour k fixé.
16) Que représentent les vitesses $c_p = \frac{\omega_n}{k}$ et $c_g = \frac{d\omega_n}{dk}$? Montrer que $c_g < c < c_p$ et $c_g\, c_p = c^2$.

EXERCICE 1.3 TD3 : Ondes de surfaces fluides ou solides

Océan de profondeur infinie

On considère une couche fluide de profondeur infine et de surface libre d'équation $y = \eta(x,t)$. On suppose que le champ de vitesse est de la forme $\underline{U} = \underline{\text{grad}}\ \phi$. On note p_{atm} la pression atmosphérique. On s'intéresse aux petites oscillations pour lesquelles ϕ et η sont petits.

1) Exprimer le champ de pression en fonction de ϕ et η. Écrire le système d'équation que vérifient ϕ et η. Pourquoi peut-on écrire les conditions aux limites en $y = 0$ au lieu de $y = \eta(x,t)$?
2) Éliminer η entre les conditions aux limites cinématiques et dynamiques en $y = 0$.
3) On cherche des solutions de la forme $\phi(x,y,t) = F(x - c\,t)\,Y(y)$. Montrer que $Y(x) = C\,\exp(k\,y)$ où C est k sont des constantes réelles. En déduire l'expression de F.
4) Exprimer la relation de dispersion des ondes de surface en milieu infini. Comparer avec le cas de profondeur h finie $\omega^2 = g\,k\,\tanh(k\,h)$.
5) Exprimer le champ de pression $p(x,y,t)$.

Ondes longitudinales et transversales dans les solides

Les équations de Navier, également appellée équations de Lamé, s'écrivent :

$$\rho\,\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\ \underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{u}) + \mu\,\Delta \underline{u}\ . \tag{1.1}$$

6) Que représente le champ $\underline{u}(x_1, x_2, x_3, t)$? Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\underline{u}$. Que vaut $\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$?
7) Écrire les équations respectives vérifiées var $d = \text{div}\ \underline{u}$ et $\underline{r} = \underline{\text{rot}}\ \underline{u}$. En déduire que les ondes longitudinales sont plus rapides que les ondes transversales.
8) On s'intéresse à des ondes de la forme $\underline{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\,(k_1\,x_1 + k_2\,x_2 - \omega\,t)}$. Montrer l'une des relations $k_1\,a_1 + k_2\,a_2 = 0$ ou $k_1\,a_2 - k_2\,a_1 = 0$ est vérifiée. Exprimer pour chaque cas ω en fonction de $\|\underline{k}\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

Réflexion d'une onde élastique longitudinale sur une surface libre

En présence d'une surface libre d'équation $x_2 = 0$, on considère la solution $\underline{u} = \underline{u}^I + \underline{u}^D + \underline{u}^R$ dans le demi-plan $x_2 \leq 0$ avec $\underline{u}^I = A_I\,\underline{e}_I\ \exp\left[ik_I\,(\underline{e}_I \cdot \underline{x} - c_1\,t)\right]$, $\underline{u}^D = A_D\,\underline{e}_D\ \exp\left[ik_D\,(\underline{e}_D \cdot \underline{x} - c_1\,t)\right]$ et $\underline{u}^R = A_R\,\underline{e}_R\ \exp\left[ik_R\,(\underline{e}_T \cdot \underline{x} - c_2\,t)\right]$ où les vecteurs unitaires $\underline{e}_I$, $\underline{e}_D$ et $\underline{e}_R$ sont définis par

$$\underline{e}_I = \begin{pmatrix} \sin\theta_I \\ \cos\theta_I \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \underline{e}_D = \begin{pmatrix} \sin\theta_{Rd} \\ -\cos\theta_{Rd} \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \underline{e}_R = \begin{pmatrix} \cos\theta_{Rr} \\ \sin\theta_{Rr} \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \underline{e}_T = \begin{pmatrix} \sin\theta_{Rr} \\ -\cos\theta_{Rr} \\ 0 \end{pmatrix}\ . \tag{1.2}$$

9) Représenter graphiquement la propagation et la réflexion des ces ondes.
10) Exprimer σ_{12} et σ_{22} pour cette solution.
11) En déduire que $\frac{\sin\theta_I}{c_1} = \frac{\sin\theta_{Rd}}{c_1} = \frac{\sin\theta_{Rr}}{c_2}$.
12) En notant $D = A_D/A_I$ et $R = A_R/A_I$, décrire les étapes qui permettraient de montre les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2\theta_I)}{c_1}\,D + \frac{\cos(2\theta_I)}{c_2}\,R &= \frac{\sin(2\theta_I)}{c_1}\ , \\ \frac{\lambda + 2\,\mu\,\cos(2\theta_I)}{c_1}\,D - \frac{\mu\,\sin(2\theta_{Rr})}{c_2}\,R &= \frac{\lambda + 2\,\mu\,\cos(2\theta_I)}{c_1}\ . \end{aligned} \tag{1.3}$$