

Olivier Thual

---

**Banque publique d'exercices**  
pour le cours de  
“**Dynamique des ondes**”

**Énoncés (corrigés sur Moodle N7)**

**Évaluation Par Contrat de Confiance**

**INP Toulouse - ENSEEIHT**

Département “Hydraulique - Mécanique des Fluides”

Version 2016, 26 septembre 2016

# Table des matières

## Chapitre 7 : Shock Waves

7.1 Trafic routier . . . . .	2
7.2 Trafic routier et feu vert . . . . .	3
7.3 Trafic routier cubique . . . . .	3

## Chapitre 1 : Basic Ideas

1.1 Paquet d'ondes . . . . .	5
------------------------------	---

## Chapitre 2 : Stretched String

2.1 Conditions initiales et équation des ondes . . . . .	6
2.2 Cordes tendues . . . . .	7
2.4 Ondes sur une corde tendue infinie . . . . .	8
2.5 Onde localisée . . . . .	9

## Chapitre 3 : Sound Waves

3.1 Ondes sonores . . . . .	10
3.2 Guide d'ondes sonores . . . . .	10

## Chapitre 4 : Linear Water Waves

4.1 Relation de dispersion des ondes capillaires . . . . .	12
4.3 Réflexion et transmission en milieu peu profond . . . . .	13
4.4 Ondes de surface en présence d'un courant . . . . .	14

## Chapitre 5 : Waves in Elastic Solids

5.1 Ondes élastiques . . . . .	16
5.2 Réflexion d'une onde solide primaire sur une surface libre . . . . .	17
5.3 Réflexion d'une onde élastique sur une surface libre . . . . .	19
5.4 Réflexion et transmission des ondes élastiques . . . . .	19
5.5 Ondes élastiques stationnaires . . . . .	21

# Chapitre 7 : Shock Waves

## EXERCICE 7.1 Trafic routier

On considère le modèle de trafic routier  $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t)$  avec  $q = \rho v(\rho)$ . On suppose ici que  $v(\rho) = A - B\rho$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives et on impose  $0 \leq \rho \leq A/B$ .

- 1) Donner l'expression de la vitesse  $c(\rho_0)$  à laquelle se propagent les petites perturbations  $\tilde{\rho}$  de la solution homogène  $\rho = \rho_0$ .
- 2) On suppose que  $\rho(x, t)$  admet une discontinuité mobile en  $x = s(t)$  et on note  $\rho_-$  et  $\rho_+$  les valeurs de  $\rho$  respectivement à gauche et à droite de la discontinuité. Calculer  $\frac{ds}{dt}(t)$ .
- 3) Comparer cette valeur avec  $c(\rho_-) + c(\rho_+)$ .
- 4) On considère la condition initiale  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  avec  $\rho_0(x) = A/B$  pour  $x \leq 0$  et  $\rho_0(x) = 0$  pour  $x \geq 0$ . Calculer  $\rho(x, t)$  pour tout  $x$  et tout  $t$  et tracer cette fonction pour  $t$  fixé.
- 5) On considère la condition initiale  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  avec  $\rho_0(x) = \rho_L$  pour  $x \leq 0$  et la condition aux limites  $\rho(0, t) = A/B$  pour  $t \in [0, T_R]$ ,  $\rho(0, t) = A/(2B)$  pour  $t \in [T_R, T_R + T_V]$  et  $\rho(0, t) = \rho_L$  pour  $t \geq T_R + T_V$  où  $T_R$  et  $T_V$  sont des constantes positives. On suppose que  $\rho(x, t) = \rho_L$  pour  $x \leq 0$  et  $t \geq T_R + T_V$ . Calculer le rapport  $\chi = T_R/T_V$  pour le cas où  $\rho_L = A/(4B)$ .

## Corrigé Trafic routier

**1)** Le bilan global conduit au bilan local  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$  avec  $c(\rho) = q'(\rho)$  et  $q(\rho) = \rho v(\rho) = A\rho - B\rho^2$ . On a donc  $c(\rho) = A - 2B\rho$ . Comme  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho_0) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0$  est l'équation d'évolution d'une petite perturbation,  $c(\rho_0) = A - 2B\rho_0$  est sa vitesse de propagation. **2)** L'analyse du bilan global conduit à la relation  $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{q(\rho_+) - q(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} = A - B \frac{\rho_+^2 - \rho_-^2}{\rho_+ - \rho_-} = A - B(\rho_+ + \rho_-)$ . **3)** Comme  $c(\rho_+) + c(\rho_-) = 2A - 2B(\rho_+ + \rho_-)$ , on a  $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{1}{2} [c(\rho_+) + c(\rho_-)]$ . **4)** Le tracé des caractéristiques est celui d'une onde de détente centrée en  $x = 0$ . Pour  $x \leq c(A/B)t = -At$  et  $t \geq 0$ , on a  $\rho(x, t) = A/B$ . Pour  $x \geq c(0)t = At$  et  $t \geq 0$ , on a  $\rho(x, t) = 0$ . Pour  $-At \leq x \leq At$  et  $t \geq 0$ , la relation  $c[\rho(x, t)] = x/t$  entraîne  $\rho(x, t) = \frac{A}{2B} - \frac{x}{2Bt}$ . **5)** L'incompatibilité entre la condition initiale et la condition aux limites génère un choc qui se propage vers la gauche. À partir de  $t = T_R$  les caractéristiques issues de l'axe  $Ot$  partent vers la gauche et deviennent la trajectoire du choc jusqu'à ce qu'il passe du côté des  $x \geq 0$  à  $t = T_R + T_V$ . En effet, s'il traversait l'axe  $Ot$  plus tard ou plus tôt que cet instant précis, la solution  $\rho(x, t)$  ne serait pas égale à  $\rho_L$  pour  $x \leq 0$  et  $t \geq T_R + T_V$ . La condition aux limites  $\rho(0, t) = \rho_*$  avec  $\rho_* = A/(2B)$  est compatible avec l'existence de la caractéristique  $x = c(\rho_*)t = 0$  démarrante à  $t = T_R$  et interrompue en  $t = T_R + T_V$  par le passage du choc. Le nombre de voitures  $q(\rho_*)T_V$  comptées en  $x = 0$  entre le temps  $t = 0$  et le temps  $t = T_R + T_V$  doit être égal au nombre de voitures  $q(\rho_L)(T_R + T_V)$

arrivant de la gauche dans la mesure où il y a autant de voitures à  $t = 0$  qu'à  $t = T_R + T_V$  dans un intervalle aussi grand que l'on veut à gauche du feu. On a donc  $q(\rho_L)(1 + \chi) = q(\rho_*)$  ce qui s'écrit  $(A\rho_L - B\rho_L^2)(1 + \chi) = (A\rho_* - B\rho_*^2)$ . En remplaçant  $\rho_L = A/(4B)$  et  $\rho_* = A/(2B)$  par leurs valeurs, on obtient  $\chi = 1/3$ .

**EXERCICE 7.2**    **Trafic routier et feu vert**

On considère le modèle de trafic routier  $\frac{\partial R}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}[Q(R)] = 0$  où  $Q(R) = RV(R)$  et  $V(R) = 1 - R^2$ . On suppose que  $R(X, 0) = 1$  pour  $X < 0$  et  $R(X, 0) = 0$  pour  $X > 0$ . Le feu, situé en  $X = 0$ , passe au vert à  $T = 0$ .

- 1) Tracer l'ensemble des caractéristiques dans le demi-plan  $T \geq 0$ .
- 2) Calculer  $R(0, T)$  pour  $T > 0$ .

**Corrigé**    **Trafic routier et feu vert**

1) Comme  $C(R) = Q'(R) = 1 - 3R^2$ , les droites caractéristiques sont tout d'abord les droites  $X = -2(T - T_0)$  et  $X = T - T_0$  avec  $T_0 \leq 0$  pour les régions uniformes respectives de valeurs  $R = 1$  et  $R = 0$  situées respectivement à gauche de la droite caractéristique d'équation  $X = -2T$  et à droite de la droite caractéristique d'équation  $X = T$ . Dans l'onde de détente centrée, située entre ces deux droites, les caractéristiques sont les droites passant par zéro et d'équations  $X = CT$  avec  $C \in [-2, 1]$  (figure 7.1). 2) La droite  $X = 0$  est telle que  $C(R) = 1 - 3R^2 = 0$ . On a donc  $R(0, T) = 1/\sqrt{3}$ .

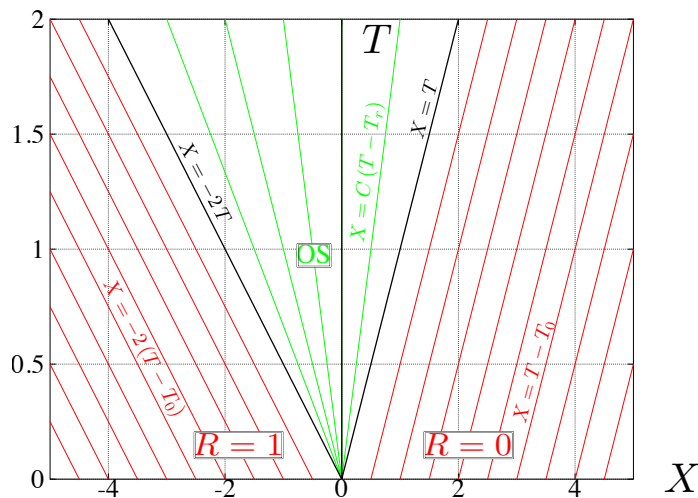


FIGURE 7.1 – Onde de détente pour le modèle de trafic routier  $C(R) = 1 - 3R^2$ .

**EXERCICE 7.3**    **Trafic routier cubique**

On considère le modèle de trafic routier  $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t)$  avec  $q = \rho v(\rho)$ . On suppose ici que  $v(\rho) = A - B\rho^2$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives et on impose  $0 \leq \rho \leq \sqrt{A/B}$ .

- 1) Donner l'expression de la vitesse  $c(\rho_0)$  à laquelle se propagent les petites perturbations  $\tilde{\rho}$  de la solution homogène  $\rho = \rho_0$ .
- 2) On suppose que  $\rho(x, t)$  admet une discontinuité mobile en  $x = s(t)$  et on note  $\rho_-$  et  $\rho_+$  les valeurs de  $\rho$  respectivement à gauche et à droite de la discontinuité. Calculer  $\frac{ds}{dt}(t)$ .
- 3) On considère la condition initiale  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  avec  $\rho_0(x) = \sqrt{A/B}$  pour  $x \leq 0$  et  $\rho_0(x) = 0$  pour  $x \geq 0$ . Calculer  $\rho(x, t)$  pour tout  $x$  et tout  $t$  et tracer le carré de cette fonction pour  $t$  fixé.
- 4) On considère la condition initiale  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  avec  $\rho_0(x) = \rho_L$  pour  $x \leq 0$  et la condition aux limites  $\rho(0, t) = \sqrt{A/B}$  pour  $t \in [0, T_R]$ ,  $\rho(0, t) = \sqrt{A/(3B)}$  pour  $t \in [T_R, T_R + T_V]$  et  $\rho(0, t) = \rho_L$  pour  $t \geq T_R + T_V$  où  $T_R$  et  $T_V$  sont des constantes positives. On suppose que  $\rho(x, t) = \rho_L$  pour  $x \leq 0$  et  $t \geq T_R + T_V$ . Calculer le rapport  $\chi = T_R/T_V$  pour le cas où  $\rho_L = \sqrt{A/(4B)}$ .

### Corrigé

**Trafic routier**

1) Le bilan global conduit au bilan local  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$  avec  $c(\rho) = q'(\rho)$  et  $q(\rho) = \rho v(\rho) = A\rho - B\rho^3$ . On a donc  $c(\rho) = A - 2B\rho^2$ . Comme  $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + c(\rho_0) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0$  est l'équation d'évolution d'une petite perturbation,  $c(\rho_0) = A - 2B\rho_0^2$  est sa vitesse de propagation. **2)** L'analyse du bilan global conduit à la relation  $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{q(\rho_+) - q(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} = A - B(\rho_+^2 + \rho_+ \rho_- + \rho_-^2)$ . **3)** Le tracé des caractéristiques est celui d'une onde de détente centrée en  $x = 0$ . Pour  $x \leq c(\sqrt{A/B})t = -2At$  et  $t \geq 0$ , on a  $\rho(x, t) = \sqrt{A/B}$ . Pour  $x \geq c(0)t = At$  et  $t \geq 0$ , on a  $\rho(x, t) = 0$ . Pour  $-2At \leq x \leq At$  et  $t \geq 0$ , la relation  $c[\rho(x, t)] = x/t$  entraîne  $\rho(x, t) = \sqrt{\frac{A}{3B} - \frac{x}{3Bt}}$ . **4)** L'incompatibilité entre la condition initiale et la condition aux limites génère un choc qui se propage vers la gauche. À partir de  $t = T_R$  les caractéristiques issues de l'axe  $Ot$  partent vers la gauche et dévient la trajectoire du choc jusqu'à ce qu'il passe du côté des  $x \geq 0$  à  $t = T_R + T_V$ . En effet, s'il traversait l'axe  $Ot$  plus tard ou plus tôt que cet instant précis, la solution  $\rho(x, t)$  ne serait pas égale à  $\rho_L$  pour  $x \leq 0$  et  $t \geq T_R + T_V$ . La condition aux limites  $\rho(0, t) = \rho_*$  avec  $\rho_* = \sqrt{A/(3B)}$  est compatible avec l'existence de la caractéristique  $x = c(\rho_*)t = 0$  démarrante à  $t = T_R$  et interrompue en  $t = T_R + T_V$  par le passage du choc. Le nombre de voitures  $q(\rho_*)T_V$  comptées en  $x = 0$  entre le temps  $t = 0$  et le temps  $t = T_R + T_V$  doit être égal au nombre de voitures  $q(\rho_L)(T_R + T_V)$  arrivant de la gauche dans la mesure où il y a autant de voitures à  $t = 0$  qu'à  $t = T_R + T_V$  dans un intervalle aussi grand que l'on veut à gauche du feu. On a donc  $q(\rho_L)(1 + \chi) = q(\rho_*)$  ce qui s'écrit  $(A\rho_L - B\rho_L^3)(1 + \chi) = (A\rho_* - B\rho_*^3)$ . En remplaçant  $\rho_L = \sqrt{A/(4B)}$  et  $\rho_* = \sqrt{A/(3B)}$  par leurs valeurs, on obtient  $\chi = 16/(9\sqrt{3}) - 1$ .

# Chapitre 1 : Basic Ideas

## EXERCICE 1.1 Paquet d'ondes

- 1) Effectuer le développement limité de  $u = A \cos[kx - \omega(k)t] + A \cos[(k + \delta k)x - \omega(k + \delta k)t]$  pour  $\delta k \ll k$  en supposant connues la pulsation  $\omega(k)$  et la vitesse de groupe  $c_g(k)$  associée.
- 2) Tracer  $u(x, t)$  en fonction de  $x$  pour un temps  $t$  donné. Indiquer la vitesse de propagation des extrema relatifs et de l'enveloppe du paquet d'ondes.
- 3) Un pont traversant un canal s'écroule au passage d'une péniche qui continue sa course à la vitesse  $v$ . Au bout d'un certain temps, les passagers de la péniche observent une vague de longueur d'onde  $L_0 = 0.624$  m qui se propage à la même vitesse qu'eux. En supposant que la profondeur du canal est infinie, calculer la vitesse  $v$ . On pourra prendre  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Corrigé Paquet d'ondes

**1)** On a  $u = 2A \cos\{(k + \delta k/2)x - [\omega(k + \delta k) + \omega(k)]t/2\} \cos\{\delta k x/2 - [\omega(k + \delta k) - \omega(k)]t/2\}$  en appliquant la formule  $\cos p + \cos q = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2})$ . Pour  $\delta k \ll k$ , le développement limité de cette expression est  $u = 2A \cos[kx - \omega(k)t] \cos\{\delta k[x - c_g(k)t]/2\} + O(\delta k)$ . **2)** La fonction  $u(x, t)$  à  $t$  fixé à la forme d'une sinusoïde de longueur d'onde  $2\pi/k$  modulée par une enveloppe sinusoïdale de longueur d'onde  $4\pi/\delta k$ . Les extrema se propagent à la vitesse de phase  $c_\varphi(k) = \omega(k)/k$ . L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe  $c_g(k) = \omega'(k)$ . **3)** Comme la profondeur est grande devant la longueur d'onde  $L_0$ , la relation de dispersion des ondes de surface peut être approximée par  $\omega(k) = \sqrt{gk}$ . La vitesse de groupe est alors  $c_g(k) = \omega'(k) = (1/2)\sqrt{g/k}$ . En appliquant la méthode de la phase stationnaire, on obtient que  $v = c_g(k_0)$  avec  $k_0 = 2\pi/L_0$ . On a donc  $v = .5 \sqrt{g L_0/(2\pi)} \sim 0.5 \text{ m/s}$ .

# Chapitre 2 : Stretched String

## EXERCICE 2.1 Conditions initiales et équation des ondes

On considère l'équation des ondes  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \geq 0$  où  $c$  est une constante strictement positive. On considère les conditions initiales  $y(x, 0) = y_0(x)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$ .

- 1) On suppose que  $y_0(x) = a \sin(kx)$  avec  $a$  et  $k$  strictement positifs. Comment choisir  $v_0(x)$  pour que la solution soit de la forme  $y(x, t) = f(x - ct)$ . Donner alors l'expression de  $y(x, t)$  en fonction de  $a$ ,  $k$ ,  $x$  et  $t$  puis tracer son profil en  $x$  pour trois instants différents.
- 2) On suppose que  $y_0(x) = a \sin(kx)$  et  $v_0(x) = akc \cos(kx)$  avec  $a$  et  $k$  strictement positifs. Exprimer  $y(x, t)$  et tracer son profil en  $x$  pour trois instants différents.
- 3) Comment choisir  $v_0(x)$  pour que la solution soit de la forme  $y(x, t) = f(x + ct) + f(x - ct)$ .
- 4) On suppose que  $y_0(x) = a \cos(kx)$  et  $v_0(x) = 0$  avec  $a$  et  $k$  strictement positifs. Exprimer  $y(x, t)$  et tracer son profil en  $x$  pour trois instants différents.
- 5) On suppose que  $y_0(x) = 0$  pour  $x \leq 0$  et  $x \geq b$ ,  $y_0(x) = 1$  pour  $x \in [0, b]$  et  $v_0(x) = 0$  pour tout  $x$ . Dessiner la solution  $y_0(x, t)$  pour  $t \in \{0, \tau/2, \tau, 2\tau\}$  avec  $\tau = b/(2c)$ .

## Corrigé Conditions initiales et équation des ondes

**1)** Si  $y(x, t) = f(x - ct)$ , on a  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = -cf'(x - ct)$  et donc  $v_0(x) = -cy'_0(x)$ . On a donc  $y(x, t) = y_0(x - ct) = a \sin[k(x - ct)]$  si l'on choisit  $v_0(x) = -kca \cos(kx)$ . Le tracé de  $y(x, t)$  est celui d'une sinusoïde qui se propage vers la droite à la vitesse de phase  $c$ . **2)** On a  $y(x, t) = y_0(x + ct) = a \sin[k(x + ct)]$ . Le tracé de  $y(x, t)$  est celui d'une sinusoïde qui se propage vers la gauche à la vitesse de phase  $c$ . **3)** Si  $y(x, t) = f(x + ct) + f(x - ct)$ , on a  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = cf'(x + ct) - cf'(x - ct)$  et donc  $v_0(x) = cf'(x) - cf'(x) = 0$ . On doit donc choisir  $v_0(x) = 0$ . Le tracé de  $y(x, t)$  est formé de deux profils qui s'éloignent symétriquement vers la gauche et vers la droite. **4)** On a  $y(x, t) = \frac{1}{2}a \cos(kx - ct) + \frac{1}{2}a \cos(kx + ct) = a \cos(kx) \cos(ct)$ . Il s'agit d'une onde stationnaire avec des noeuds et des ventres. **5)** La condition initiale s'écrit  $y_0(x) = H(x) - H(x - b)$ . En appliquant la formule  $y(x, t) = \frac{1}{2}[y_0(x - ct) + y_0(x + ct)]$ , on obtient  $y(x, t) = \frac{1}{2}[H(x + ct) - H(x + ct - b)] + \frac{1}{2}[H(x - ct) - H(x - ct - b)]$ . Pour  $t \in [0, \tau]$ , on a  $y(x, t) = 0$  pour  $x \leq -ct$ ,  $y(x, t) = 1/2$  pour  $x \in [-ct, ct]$ ,  $y(x, t) = 1$  pour  $x \in [ct, b - ct]$ ,  $y(x, t) = 1/2$  pour  $x \in [b - ct, b + ct]$  et  $y(x, t) = 0$  pour  $x \geq b + ct$ . Pour  $t \geq \tau$ , on a  $y(x, t) = 0$  pour  $x \leq -ct$ ,  $y(x, t) = 1$  pour  $x \in [-ct, b - ct]$ ,  $y(x, t) = 0$  pour  $x \in [b - ct, ct]$ ,  $y(x, t) = 1$  pour  $x \in [ct, b + ct]$  et  $y(x, t) = 0$  pour  $x \geq b + ct$ .

**EXERCICE 2.2** Cordes tendues

On considère une corde de masse linéique  $\rho$ , tendue avec la tension  $T$  et dont le déplacement transversal est décrit par l'équation des ondes 1D  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ .

- 1) Préciser les dimensions de  $\rho$  et de  $T$ . Exprimer  $c$  en fonction de ces deux paramètres.

**Corde de longueur infinie**

On suppose que la corde est suffisamment longue pour pouvoir être considérée comme infinie. On considère une condition initiale de la forme  $y(x, 0) = y_0(x)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$  et on s'intéresse à la solution  $y(x, t)$  qui en découle pour  $t \geq 0$ . On définit la fonction  $F$  par les relations  $F(X) = 1 + \cos(kX)$  pour  $|X| \leq l$  et  $F(X) = 0$  sinon, où  $l$  est une longueur et  $k = \pi/l$ .

- 2) On suppose que  $y_0(x) = 2aF(x)$  et  $v_0(x) = 0$  où  $a$  est une constante. Exprimer la solution  $y(x, t)$  à l'aide de la fonction  $F(X)$ .
- 3) Tracer les profils spaciaux de  $y(x, t)$  et  $v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$  pour  $t > \tau$  avec  $\tau = l/c$ .
- 4) Mêmes questions en supposant que  $y_0(x) = aF(x)$  et  $v_0(x) = -acF'(x)$ .
- 5) Mêmes questions avec  $y_0(x) = a[F(x) - F(x - 2L)]$  et  $v_0(x) = ac[-F'(x) - F'(x - 2L)]$ , où  $L > l$ .
- 6) Que valent dans ce cas le signal  $y(L, t)$  pour  $t \geq 0$  ainsi que le profil  $y(x, T)$  pour  $T = L/c$ ?

**Corde semi-finie**

On suppose maintenant que la corde est fixée au point  $x = L$  pour lequel  $y(L, t) = 0$ . On s'intéresse aux solutions de la forme  $y(x, t) = f_I(x - ct) + f_R(x + ct)$ .

- 7) On suppose  $f_I(X)$  connu. Exprimer  $f_R(X)$  en fonction de  $f_I(X)$ . On pourra considérer le changement de variable  $X = L + ct$ .
- 8) Exprimer alors  $y(x, t)$  à l'aide de la fonction  $f_I$ .
- 9) On considère la condition initiale  $y_0(x) = aF(x)$  et  $v_0(x) = -acF'(x)$  avec  $l < L$ . Écrire la solution  $y(x, t)$  qui en découle. Comparer avec la solution de la question 5.
- 10) Tracer  $y(x, t)$  à différents instants dans les intervalles  $[0, T - \tau]$ ,  $[T - \tau, T]$ ,  $[T, T + \tau]$  et  $[T + \tau, +\infty]$  pour  $T = L/c$  et  $\tau = l/c$ ?

**Corrigé** Cordes tendues

- 1) On a  $[\rho] = \text{kg/m}$  et  $[T] = \text{N} = \text{kg.m/s}^2$ . La vitesse  $c = \sqrt{T/\rho}$  vérifie bien  $[c] = \text{m/s}$ .

**Corde de longueur infinie**

2) La solution s'écrit  $y(x, t) = a[F(x - ct) + F(x + ct)]$ . On a bien  $y(x, 0) = F(x)$ . Comme  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = ac[-F'(x - ct) + F'(x + ct)]$ , on a bien  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$ . 3) Le tracé de  $y(x, t)$  pour  $t > l/c$  est composé de deux "cloches" animées des vitesses respectives  $-c$  et  $c$  (voir Figure 2.2a). Pour  $t > l/c$ , les deux cloches sont disjointes. On a  $v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = ac[-F'(x - ct) + F'(x + ct)]$  avec  $F'(X) = -k \sin(kX)$  pour  $|X| \leq l$  et  $F'(X) = 0$  sinon. Le tracé de  $v(x, t)$  est composé de deux sinusoïdes qui suivent les "cloches"  $y(x, t)$ . Ces sinusoïdes sont positives à l'avant du sens de propagations des "cloches". 4) On a ici  $y(x, t) = aF(x - ct)$  et  $v(x, t) = -acF'(x - ct)$ . Cette solution décrit la "cloche" qui se propage vers la droite (partie droite de la Figure 2.2a). 5) On a ici  $y(x, t) = a[F(x - ct) - F(x - 2L + ct)]$  et  $v(x, t) = ac[-F'(x - ct) - F'(x - 2L + ct)]$ . Cette solution décrit une "cloche" et une "cloche inversée" animées des vitesses respectives  $c$



et  $-c$ , partant des positions respectives  $x = 0$  et  $x = 2L$  et qui se rencontrent (centres) en  $t = T = L/c$  (voir Figure 2.2b). **6)** On a donc  $y(x, T) = a [F(x - L) - F(x - 2L + L)] = 0$  pour tout  $x$  et  $y(L, t) = a [F(L - ct) - F(-L + ct)] = 0$  pour tout  $t$  en utilisant la symétrie  $F(-X) = F(X)$ .

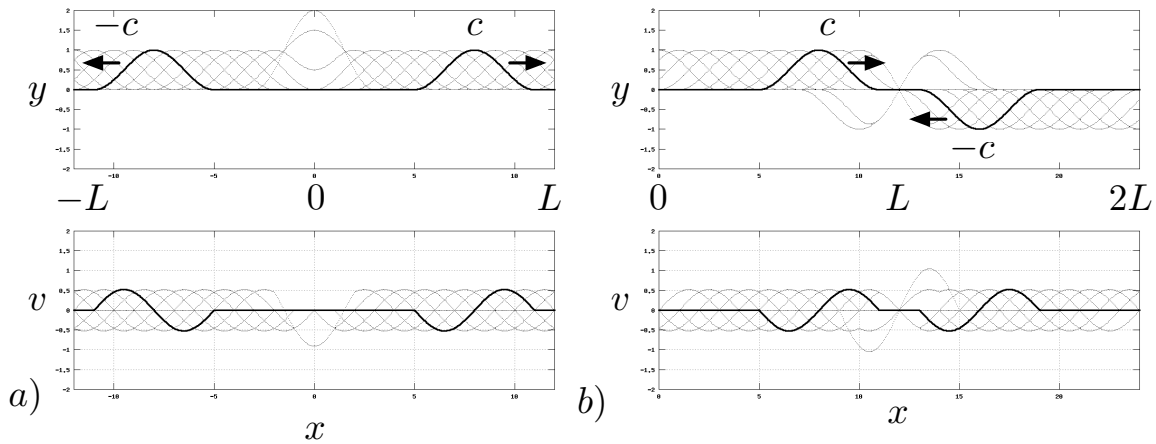


FIGURE 2.2 – Tracés de  $y$  et  $v$  pour a) questions 3 et 4, b) questions 5 et 10.

### Corde semi-finie

**7)** La condition aux limites  $y(L, t) = 0$  s'écrit  $f_I(L - ct) = -f_R(L + ct)$  pour tout  $t$ . On posant  $X = L + ct$ , donc  $L - ct = 2L - X$ , on obtient  $f_R(X) = -f_I(2L - X)$ . **8)** On en déduit que  $y(x, t) = f_I(x - ct) - f_I(2L - x - ct)$ . **9)** En utilisant la symétrie  $F(-X) = F(X)$ , on peut écrire  $y(x, t) = a [F(x - ct) - F(x - 2L + ct)]$ . Cette solution est identique à celle de la question 5 en milieu infini. **10)** La "cloche"  $F(X)$  qui se propage vers la droite à la vitesse  $c$  rencontre en  $x = L$  la "cloche inversée"  $-F(X)$  qui se propage vers la gauche à la vitesse  $-c$  de sorte que le bord  $x = L$  soit un noeud de l'onde stationnaire ainsi générée avec  $y(L, t) = 0$  pour tout  $t$  (voir Figure 2.2b).

### EXERCICE 2.4 Ondes sur une corde tendue infinie

On considère le déplacement  $y(x, t)$  d'une corde tendue infinie de tension  $T$  (N) et de masse linéique  $\rho$  (kg/m).

- 1) Donner l'expression de la constante  $c$  de l'équation des ondes  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$  vérifiée par le déplacement.
- 2) On suppose que  $y(x, 0) = y_0(x)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$ . En considérant la solution générale  $y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ , montrer que l'on peut écrire  $f(X) + g(X) = y_0(X)$  et  $-c f'(X) + c g'(X) = v_0(X)$ , où  $\varphi(X)$  est une fonction que l'on exprimera en imposant  $\varphi(0) = 0$ .
- 3) Calculer  $f(X)$  et  $g(X)$  dans le cas où  $v_0(x) = -c y_0'(x)$ .
- 4) On suppose que  $y_0(x) = a/(1 + x^2)$  et  $v_0(x) = 2acx/(1 + x^2)^2$ . En déduire  $y(x, t)$ .
- 5) Tracer  $y(x, t)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$  pour plusieurs valeurs de  $t \leq 0$ .
- 6) Même question dans le cas  $y_0(x) = a/(1 + x^2)$  et  $v_0(x) = 0$ .

**Corrigé Ondes sur une corde tendue infinie**

1) On a  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ . 2) On a  $\varphi(X) = \int_0^X v_0(x) dx$ . 3) Dans le cas  $v_0(x) = -c y_0'(x)$ , on a  $\varphi(X) = -c y_0(X)$  et donc  $f(X) = y_0(X)$  et  $g(X) = 0$ . 4) Comme  $v_0(x) = -c y_0'(x)$ , on a  $y(x, t) = y_0(x - ct) = a/[1 + (x - ct)^2]$ . Le tracé de  $y(x, t)$  et  $v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$  est effectué sur la figure 2.3a. 5) Dans le cas  $v_0(x) = 0$ , on a  $y(x, t) = \frac{1}{2}y_0(x - ct) + \frac{1}{2}y_0(x + ct) = \frac{1}{2}a/[1 + (x - ct)^2] + \frac{1}{2}a/[1 + (x + ct)^2]$ . Le tracé de  $y(x, t)$  et  $v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$  est effectué sur la figure 2.3b.

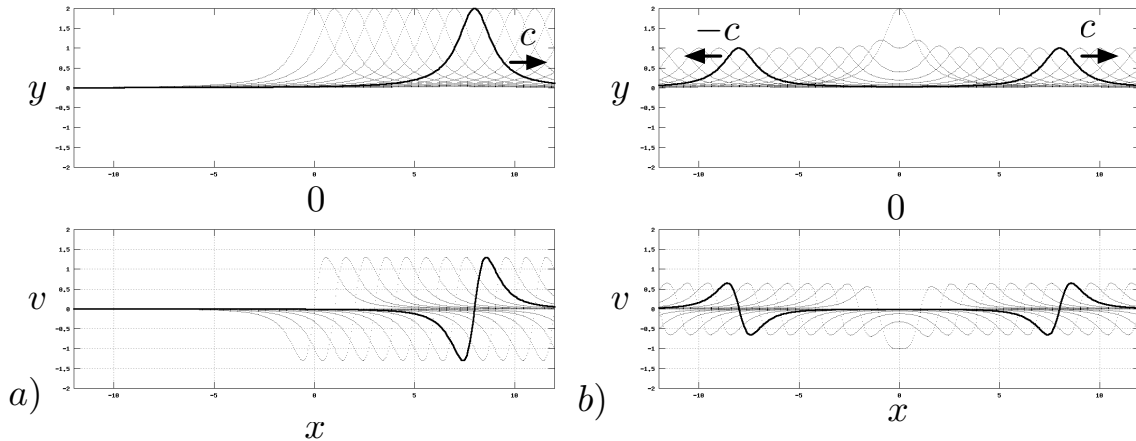


FIGURE 2.3 – Tracés de  $y$  et  $v$ . a)  $v_0 = -c y_0'$ . b)  $v_0 = 0$ .

**EXERCICE 2.5 Onde localisée**

On considère l'équation des ondes 1D  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$  dans un milieu infini.

On note  $\phi_0(x) = \phi(x, 0)$  et  $\zeta_0(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0)$  les conditions initiales.

- 1) Dans le cas des oscillations transversales d'une corde tendue,  $y = \phi$  est le déplacement. Donner l'expression de  $c$  en fonction de la tension  $T$  et de la masse linéique  $\rho$  de la corde.
- 2) Dans le cas des vibrations longitudinales isentropiques d'un gaz parfait dans un tube,  $\phi$  est le potentiel des vitesses. Donner l'expression de  $c$  en fonction des paramètres de pression  $p_0$ , de la masse volumique  $\rho_0$ , de la constante  $\gamma = C_p/C_v$  du gaz.
- 3) On suppose  $\phi_0(x) = \sin x e^{-x^2}$  et  $\zeta_0(x) = c(\cos x - 2x \sin x) e^{-x^2}$ . Calculer et tracer la solution  $\phi(x, t)$  pour plusieurs valeurs de  $t$ .

**Corrigé Onde localisée sur corde tendue**

1) Dans le cas d'une corde  $c = \sqrt{T/\rho}$ . 2) Dans le cas d'un tube rempli de gaz parfait, l'isentropie entraîne  $p = B \rho^\gamma$  où  $B$  est une constante qui ne dépend que de l'entropie  $s$ . On a donc  $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma p_0/\rho_0$ . 3) Comme  $\zeta_0(x) = c \phi_0'(x)$ , on a  $\phi(x, t) = \phi_0(x + ct) = \sin(x + ct) e^{-(x+ct)^2}$ .

# Chapitre 3 : Sound Waves

## EXERCICE 3.1 Ondes sonores

On considère les équations d'Euler compressibles

$$\Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \tilde{U} = \text{grad } \phi, \quad \tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{c^2} \tilde{p}.$$

On s'intéresse à la propagation des ondes sonores dans un tube d'axe  $Ox$  et de section  $A_1$  pour  $x \leq 0$  et  $A_2$  pour  $x \geq 0$ . On cherche des solutions de la forme  $\phi = \phi_I(x - ct) + \phi_R(x + ct)$  pour  $x \leq 0$  et  $\phi = \phi_T(x - ct)$  pour  $x \geq 0$ .

- 1) Montrer que  $\tilde{p} = f_I(x - ct) + f_R(x + ct)$  pour  $x \leq 0$  et  $\tilde{p} = f_T(x - ct)$  pour  $x \geq 0$  où  $f_I(X)$ ,  $f_R(X)$  et  $f_T(X)$  sont des fonctions de la variable muette  $X$  que l'on exprimera à l'aide de  $\phi_I(X)$ ,  $\phi_R(X)$  et  $\phi_T(X)$ .
- 2) Écrire la condition de continuité de la pression en  $x = 0$  à l'aide de  $f_I$ ,  $f_R$  et  $f_T$ .
- 3) Écrire la condition de continuité du débit en  $x = 0$  à l'aide  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $f_I$ ,  $f_R$  et  $f_T$ .
- 4) En déduire  $f_T(x - ct)$  et  $f_R(x + ct)$  en fonction de  $f_I$ .
- 5) Que valent les coefficients de réflexion et de transmission pour  $A_1 \ll A_2$  puis  $A_1 \gg A_2$ ?

## Corrigé Ondes sonores

**1)** Comme  $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ , on a  $f_I(X) = \rho_0 c \phi'_I(X)$ ,  $f_R(X) = -\rho_0 c \phi'_R(X)$  et  $f_T(X) = \rho_0 c \phi'_T(X)$ .  
**2)** La continuité de la pression en  $x = 0$  s'écrit  $f_I(-ct) + f_R(ct) = f_T(-ct)$  pour tout  $t$ . **3)** Comme  $\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ , la continuité du débit  $Q = \tilde{u} A$  s'écrit  $A_1 \phi'_I(-ct) + A_1 \phi'_R(ct) = A_2 \phi'_T(-ct)$ , ce qui conduit à  $A_1 f_I(-ct) - A_1 f_R(ct) = A_2 f_T(-ct)$ . **4)** On en déduit  $f_R(ct) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} f_I(-ct)$  et  $f_T(-ct) = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} f_I(-ct)$ . Comme  $f_R(X) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} f_I(-X)$  et  $f_T(X) = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} f_I(X)$ , on a  $f_R(x + ct) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} f_I(-x - ct)$  et  $f_T(x - ct) = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} f_I(x - ct)$ . **5)** Pour  $A_1 \ll A_2$ , le coefficient de réflexion est  $-1$  et le coefficient de transmission est très petit. La cavité  $A_2$  impose une pression constante. Pour  $A_1 \gg A_2$ , le coefficient de réflexion est  $1$  et le coefficient de transmission est  $2$ . La discontinuité de section impose une vitesse nulle pour la cavité de gauche. L'onde transmise est deux fois plus intense (par unité de surface) que l'onde incidente.

## EXERCICE 3.2 Guide d'ondes sonores

On considère les équations d'Euler linéarisées

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \tilde{u} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } \tilde{p}, \quad \tilde{u} = \text{grad } \phi, \quad \tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}. \quad (3.1)$$

- 1) Interpréter brièvement les équations de ce modèle. Comment est défini  $c$  lorsque les transformations induites par le mouvement sont adiabatiques?

- 2) On considère le cas 2D pour lequel les champs ne dépendent pas de la coordonnée  $y$ . Expliquer les équations en notant  $\tilde{u}$  et  $\tilde{w}$  les composantes non nulles de la vitesse.
- 3) On considère le domaine  $0 \leq x \leq d$  avec les conditions aux limites  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  en  $x = 0$  et  $x = d$ . Interpréter ces conditions aux limites et faire un schéma pour illustrer le problème.
- 4) On cherche des solutions de la forme  $\phi(x, z, t) = 2 A \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_n z)}$  où  $n$  est un entier. Exprimer  $k_n > 0$  en fonction de  $n$ ,  $c$ ,  $d$  et  $\omega$  pour les valeurs de  $n$  où il est défini.

### Corrigé

 Guide d'ondes sonores

**1)** Les équations traduisent la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la définition du potentiel des vitesses et la loi d'état linéarisé autour d'un état  $\rho_0$ . La quantité  $c^2$  est la dérivée de  $p$  par rapport à  $\rho$ , à entropie constante lorsque l'on s'intéresse à des oscillations adiabatiques. **2)** Dans le cas 2D, on peut écrire  $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$ ,  $\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $\tilde{w} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ . **3)** Les conditions aux limites indiquent que la vitesse  $\tilde{u}$ , normale aux parois d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = d$ , est nulle. Le fluide est donc compris entre deux parois rigides. **4)** En éliminant  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{u}$ , on montre que  $\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ . En reportant l'expression de  $\phi$  dans cette équation des ondes, on obtient  $k_n^2 - n^2 \pi^2 / d^2 = \omega^2 / c^2$  et donc  $k_n = \sqrt{\omega^2 / c^2 - n^2 \pi^2 / d^2}$ .

# Chapitre 4 : Linear Water Waves

## EXERCICE 4.1 Relation de dispersion des ondes capillaires

On s'intéresse aux petites oscillations irrotationnelles et 2D, dans un plan  $(x, z)$ , d'une couche fluide incompressible de profondeur infinie dont la surface libre est décrite par l'équation  $z = \eta(x, t)$  avec  $\eta$  petit. On note  $\underline{f} = -\rho g \underline{e}_z$  les forces extérieures de volume où  $\rho$  est la masse volumique et  $g$  la gravité. On néglige les forces visqueuses.

La tension superficielle est responsable d'une discontinuité entre la pression  $p_f$  du fluide au niveau de sa surface libre et la pression  $p_a$  de l'atmosphère. Ce saut de pression s'écrit  $p_f - p_a = \sigma/R$ , où  $\sigma$  est une constante qui vaut  $\sigma = 0.07 \text{ N m}^{-1}$  pour l'eau et  $R$  le rayon de courbure de la surface libre dans le cas d'une déformation bidimensionnelle.

- 1) On admet sans démonstration que  $R = - \left[ 1 + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 \right]^{3/2} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^{-1}$ . En déduire l'expression du saut de pression  $p_f - p_a$  à l'ordre dominant du petit paramètre  $\eta$ .
- 2) On suppose que le champ de vitesse de l'écoulement s'écrit  $\underline{U} = \text{grad } \phi$  où  $\phi(x, z, t)$  est une fonction du même ordre de grandeur que  $\eta$ . Justifier la relation  $\Delta \phi = 0$ .
- 3) Justifier la condition aux limites  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, t) = 0$  pour tout  $x$  et tout  $t$ .
- 4) Justifier la relation  $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ .
- 5) Justifier la condition aux limites  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  en  $z = 0$ .
- 6) Exprimer la condition aux limites dynamique à en  $z = \eta$  qui relie  $\phi(x, 0, t)$  et  $\eta(x, t)$ .
- 7) On cherche des solutions complexes sous la forme  $\phi = \Phi(z) \exp(i k_x x - i \omega t)$ . Justifier la forme  $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$  où  $\Phi_m$  est une amplitude complexe et  $k = |k_x|$ .
- 8) En déduire que la relation de dispersion s'écrit  $\omega = \sqrt{(g + \gamma k^2) k}$  où  $\gamma$  est une constante que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.
- 9) Tracer  $\omega$  en fonction de  $k$ . Donner ses équivalents pour  $k$  petit puis  $k$  grand.
- 10) Tracer la vitesse de phase  $c_p$  en fonction de  $k$ . Calculer sa valeur minimum  $c_*$ .
- 11) En-dessous de quelle longueur d'onde  $\lambda_*$  la tension superficielle est-elle négligeable? Donner sa valeur numérique en prenant  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Corrigé Relation de dispersion des ondes capillaires

**1)** Comme  $1/R = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + O(\eta^2)$ , on a  $p_f - p_a = -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  à l'ordre dominant en  $\eta$ . **2)** L'incompressibilité entraîne  $\text{div } \underline{U} = \text{div}(\text{grad } \phi) = \Delta \phi = 0$ . **3)** La vitesse normale  $\underline{U} \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  est nulle au fond. Comme la profondeur est infinie,  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  tend vers zero lorsque  $z$  tend vers  $-\infty$ . **4)** La relation de Bernouilli linéarisée  $\text{grad} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g z + p \right) = 0$ , obtenue en négligeant le terme  $\text{grad } \underline{U}^2$ , entraîne  $\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g z + p = p_a$  par un choix judicieux de la jauge  $\phi \rightarrow \phi + C(t)$  où  $C(t)$  est un fonction arbitraire du temps. **5)** La condition aux limites cinématique  $\frac{d}{dt}[z - \eta(x, t)] = \underline{U} \cdot \underline{e}_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \underline{U} \cdot \text{grad } \eta = 0$  se linéarise en  $\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$  en négligeant le terme  $\underline{U} \cdot \text{grad } \eta$  et en tenant

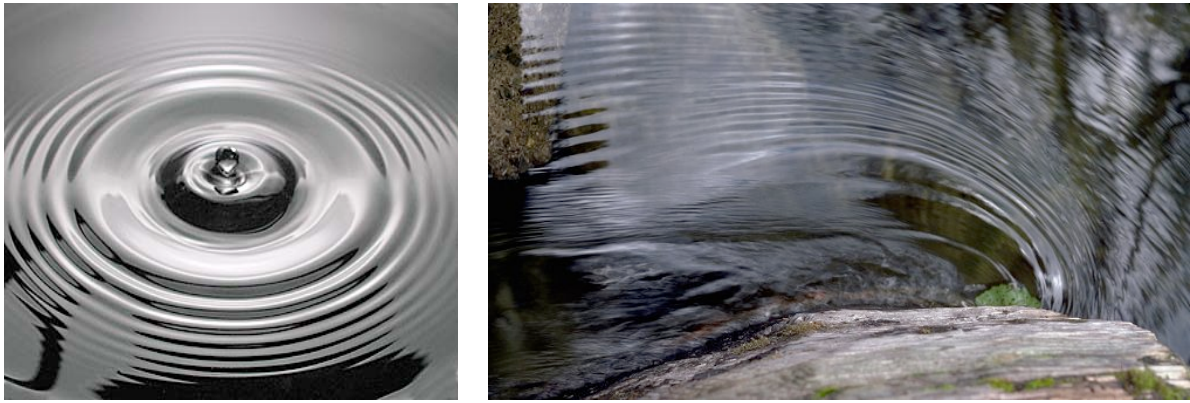


FIGURE 4.4 – Visualisation d’ondes capillaires.

compte de  $\underline{U} = \text{grad } \phi$ . **6)** La condition aux limites dynamique  $p_f - p_a = -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  en  $z = \eta$  s’écrit  $-\rho g \eta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ . En approximant  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, \eta, t)$  par  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t)$  à l’ordre dominant en  $\eta$ , on obtient  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t) = -g \eta(x, t) + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x, t)$ . **7)** Ce choix de  $\phi$  entraîne  $\Delta \phi = 0$  et  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ . **8)** Les conditions aux limites  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  en  $z = 0$  entraînent  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}$ . En reportant  $\phi$  dans cette équation, on obtient  $-\omega^2 = -g k - \frac{\sigma}{\rho} k^3$ . On en déduit  $\omega = \sqrt{(g + \gamma k^2) k}$  avec  $\gamma = \sigma/\rho$ . **9)** La fonction  $\omega(k)$  est croissante. On a  $\omega(k) \sim \sqrt{g} k^{1/2}$  pour  $k$  petit  $\omega(k) \sim \sqrt{\gamma} k^{3/2}$  pour  $k$  grand. **10)** La vitesse de phase est  $c_p(k) = \omega(k)/k = (g/k + \gamma k)^{1/2}$ . Elle tend vers l’infini pour  $k$  petit et  $k$  grand. Comme  $c_p'(k) = \frac{1}{2} (-g/k^2 + \gamma) / c_p(k)$ , on a  $k_* = \sqrt{g/\gamma} = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}$  et donc  $c_* = \sqrt{2} (g/\gamma)^{1/4} \sim 0.8$  m/s. **11)** On peut négliger la tension superficielle pour  $k > k_*$  c’est-à-dire  $\lambda < \lambda_* = 2\pi/k_* = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 1.7$  cm.

**EXERCICE 4.3** Réflexion et transmission en milieu peu profond

On rappelle que les ondes de surface harmoniques se propageant vers la droite sont de la forme

$$\phi(x, y, t) = \bar{B} \text{ch}[k(y+h)] \sin[k(x-ct) + \varphi], \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad kc = \sqrt{gk \text{th}(kh)}, \quad (4.2)$$

où  $\phi$  est le potentiel des vitesses,  $\bar{B}$  et  $k$  des constantes réelles positives,  $h$  la profondeur,  $\varphi$  une phase arbitraire,  $\eta$  l’élévation de la surface libre et  $g$  la gravité. On se place dans le cas peu profond  $kh \ll 1$ .

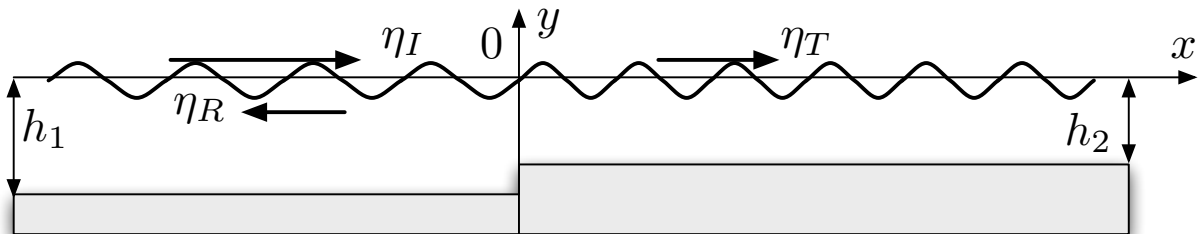


FIGURE 4.5 – Ondes de surface incidente  $\eta_I$ , réfléchi  $\eta_R$  et transmise  $\eta_T$  en milieu peu profond.

- 1) À l’ordre dominant du petit paramètre  $kh$ , donner la valeur approchée de  $\phi$  et décrire les trajectoires.

- 2) Exprimer la vitesse  $c$  à l'ordre dominant. Les ondes sont-elles dispersives à cet ordre ?
- 3) Justifier que l'élévation de la surface libre des ondes en milieu peu profond est de la forme  $\eta(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ . En déduire l'expression de la vitesse  $\tilde{u}(x, t)$  associée.
- 4) On considère une discontinuité de hauteur avec  $h = h_1$  pour  $x \leq 0$  et  $h = h_2$  pour  $x \geq 0$ . (voir figure 4.5). Justifier les conditions aux limites  $[[\eta]] = 0$  et  $[[h\tilde{u}]] = 0$  en  $x = 0$ .
- 5) On considère l'onde incidente  $\eta_I = f_I(x - c_1 t)$  et on note respectivement  $\eta_R = f_R(x + c_1 t)$  et  $\eta_T = f_T(x - c_2 t)$  les ondes incidentes et réfléchies. Que valent  $c_1$  et  $c_2$  ?
- 6) Exprimer  $\eta(x, t)$  sur tout le domaine à l'aide de la fonction  $f_I(X)$ .
- 7) Considérer les cas  $h_1 \ll h_2$  et  $h_2 \ll h_1$ . Commenter.

### Corrigé

**Réflexion et transmission en milieu peu profond**

**1)** À l'ordre dominant en  $kh$ , on peut écrire  $\phi(x, t) = \bar{B} \sin[k(x - ct) + \varphi]$  et donc  $\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = k \bar{B} \cos[k(x - ct) + \varphi]$  et  $\tilde{v} = 0$ . Les trajectoires sont donc des segments de droite horizontaux.

**2)** On obtient  $c = \sqrt{gh}$  à l'ordre dominant. Les ondes de surface sont non dispersives en milieu peu profond. **3)** Les ondes harmoniques sont de la forme  $\phi(x, y, t) = \bar{B}_- \sin[k(x - ct) + \varphi_-]$  ou  $\phi(x, y, t) = \bar{B}_+ \sin[k(x + ct) + \varphi_+]$ . Comme  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0$ , toute solution en  $\eta(x, t)$  est la superposition d'ondes élémentaires de la forme  $\eta(x, t) = \frac{k c}{g} \bar{B}_- \cos[k(x - ct) + \varphi_-]$  et  $\eta(x, t) = -\frac{k c}{g} \bar{B}_+ \cos[k(x + ct) + \varphi_+]$ . La solution générale est de la forme  $\eta(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ . Comme  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0$  et  $\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ , on en déduit que  $\tilde{u}(x, t) = +\frac{g}{c} F(x - ct) - \frac{g}{c} G(x + ct)$ .

**4)** L'élévation de la surface libre  $\eta$  et le débit  $h\tilde{u}$  sont continus (absence de ressaut) en  $x = 0$ .

**5)** On a  $c_1 = \sqrt{gh_1}$  et  $c_2 = \sqrt{gh_2}$ . **6)** En appliquant les conditions aux limites en  $x = 0$ , le raccordement de la solution  $\eta = \eta_I + \eta_R$  pour  $x < 0$  avec la solution  $\eta = \eta_T$  pour  $x > 0$  s'écrit  $f_I(-c_1 t) + f_R(c_1 t) = f_T(-c_2 t)$  pour  $[[\eta]] = 0$  et  $c_1 f_I(-c_1 t) - c_1 f_R(c_1 t) = c_2 f_T(-c_2 t)$  pour  $[[h\tilde{u}]] = 0$  en utilisant les relations  $c_1^2 = gh_1$  et  $c_2^2 = gh_2$ . On en déduit  $f_T(X) = T f_I\left(\frac{c_1}{c_2} X\right)$  et  $f_R(X) = -R f_I(-X)$  et donc  $f_T(x - c_2 t) = T f_I\left(\frac{c_1}{c_2}(x - c_2 t)\right)$  et  $f_R(x + c_1 t) = -R f_I[-(x + c_1 t)]$  avec  $T = 2c_1/(c_1 + c_2)$  et  $R = -(c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$ . **7)** Dans le cas  $h_1 \ll h_2$ , on a  $T = 0$  et  $R = -1$ . L'amplitude de la vague transmise est très petite car l'énergie de l'onde, initialement comprise dans l'épaisseur  $h_1$ , se dilue dans l'épaisseur  $h_2$ . Le point  $x = 0$  est un noeud de l'oscillation stationnaire observée en  $x < 0$ . Dans le cas  $h_2 \ll h_1$ , on a  $T = 2$  et  $R = 1$ . Le canal peu profond débouche sur un canal encore moins profond et l'amplitude de la vague transmise est double. Le point  $x = 0$  est un ventre de l'oscillation stationnaire observée en  $x < 0$ .

### EXERCICE 4.4

**Ondes de surface en présence d'un courant**

On considère une couche fluide de masse volumique  $\rho$  constante dont l'état stationnaire occupe le domaine  $y \leq 0$  en étant animé d'une vitesse constante  $U_0 \underline{e}_x$ . On s'intéresse aux petites oscillations 2D de cette couche fluide en notant  $y = \eta(x, t)$  l'élévation de la surface libre,  $p(x, y, t)$  le champ de pression et  $\underline{U}(x, y, t)$  le champ de vitesse. On suppose que ces mouvements peuvent être décrits pour un modèle incompressible, inviscide et irrotationnel. On suppose que le fluide est surmonté d'un gaz de pression  $p_{atm}$  supposée constante.

- 1) On suppose que le champ de vitesse est de la forme  $\underline{U} = \text{grad}(U_0 x + \phi)$ . Justifier ce choix.
- 2) D'où provient alors la relation  $\Delta \phi = 0$ ? Montrer que l'on peut écrire  $p = p_{atm} - \rho g y - \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$ .
- 3) D'où proviennent les conditions aux limites  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$  pour  $y = -\infty$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$  pour  $y = 0$ ? Indiquer les approximations effectuées.

- 4) Écrire la condition aux limites dynamique de surface libre dans le cadre de l'approximation des petites oscillations.
- 5) En déduire que  $(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x})^2 \phi + g \frac{\partial}{\partial y} \phi = 0$  pour  $y = 0$ .
- 6) Exprimer les relations de dispersion  $\omega = \Omega_+(k_x)$  et  $\omega = \Omega_-(k_x)$  pour des perturbations de la forme  $\phi = \Phi(y) \cos(k_x x - \omega t)$ . On pourra noter  $k = |k_x|$ . Tracer le profil  $\Phi(y)$ .

### Corrigé

 Ondes de surface en présence d'un courant

1) Comme le champ de vitesse est irrotationnel, il s'écrit comme le gradient d'un potentiel que l'on peut exprimer sous la forme  $U_0 x + \phi$  de sorte que  $\underline{U} = U_0 \underline{e}_x + \underline{\text{grad}} \phi$  et que  $\phi$  soit petit pour les petites oscillations autour de l'état de base considéré. 2) La loi de conservation de la masse s'écrit  $\text{div} \underline{U} = \Delta \phi = 0$ . La loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit  $\underline{\text{grad}} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \underline{U}^2 + p + \rho g y \right) = 0$  ce qui entraîne  $p = p_{atm} - \rho g y - \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$  en négligeant le terme d'ordre  $\underline{U}^2$ , qui est d'ordre 2, et en ajoutant à  $\phi$  une fonction du temps  $C(t)$  adéquate de façon à choisir  $p_{atm}$  comme constante d'intégration du gradient. 3) La condition aux limites  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$  pour  $y = -\infty$  exprime qu'il n'y a pas de vitesse verticale sur un fond très profond. La condition aux limites cinématique  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$  pour  $y = 0$  s'obtient en négligeant le terme non linéaire  $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \eta$  et en remplaçant la surface mobile  $y = \eta(x, t)$  par le plan fixe  $y = 0$  en raison de l'approximation des petites oscillations. 4) La condition dynamique  $p = p_{atm}$  en  $y = 0$  s'écrit  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = g \eta$ . 5) Comme  $(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}) \phi = g \eta$  et  $(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}) \eta = \frac{\partial \phi}{\partial y}$  en  $y = 0$ , on peut écrire  $(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x})^2 \phi = g \frac{\partial \phi}{\partial y}$  sur cette même surface. 6) La relation  $\Delta \phi = 0$  entraîne  $\Phi''(y) + k^2 \Phi(y) = 0$  avec  $k = |k_x|$ . En tenant compte de la condition aux limites en  $y = -\infty$ , on en déduit  $\Phi(y) = \Phi_m \exp(k y)$  où  $\Phi_m$  est une constante. En reportant dans la condition aux limites de surface, on obtient  $(\omega - U_0 k_x)^2 = g k$  après avoir éliminé la solution triviale  $\Phi_m = 0$ . Les relations de dispersion sont donc  $\omega = \Omega_+(k_x) = U_0 k_x + \sqrt{g k}$  et  $\omega = \Omega_-(k_x) = U_0 k_x - \sqrt{g k}$ . Le profil  $\phi(y)$  décroît exponentiellement vers le fond.



# Chapitre 5 : Waves in Elastic Solids

## EXERCICE 5.1 Ondes élastiques

On considère l'équation de Lamé  $\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u}$  où  $\underline{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  est le champ de déplacement d'un milieu élastique infini. On note  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  et  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ .

- 1) On considère le champ  $\underline{u} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, 0 \right)$  avec  $\phi = \phi_m \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)$  où  $\phi_m, k_1, k_2$  et  $\omega$  sont des constantes réelles strictement positives. Quelle relation doivent vérifier ces constantes pour que  $\underline{u}$  soit solution des équations de Lamé?
- 2) Dessiner les iso- $\phi$  dans le plan  $Ox_1x_2$  pour un instant donné. Indiquer la direction de la vitesse de phase sur le graphique et exprimer son module en fonction des paramètres du problème. Dessiner le champ de déplacement. Quelle est la nature de l'onde élastique observée?
- 3) On considère le champ  $\underline{u} = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, 0 \right)$  avec  $\psi = \psi_m \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)$  où  $\psi_m, k_1, k_2$  et  $\omega$  sont des constantes réelles strictement positives. Quelle relation doivent vérifier ces constantes pour que  $\underline{u}$  soit solution des équations?
- 4) Dessiner les iso- $\psi$ , la direction de la vitesse de phase et le champ de déplacement. Quelle est la nature de l'onde élastique observée?

On suppose maintenant que  $\underline{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  est le champ de déplacement d'un milieu élastique semi-infini contenu dans le demi-espace  $x_2 \leq 0$  dont la frontière  $x_2 = 0$  est une surface libre.

On considère le champ  $\underline{u} = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, 0 \right) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, 0 \right)$  avec  $\psi = A \cos(k x_1 - \omega t) e^{\alpha x_2}$  et  $\phi = B \sin(k x_1 - \omega t) e^{\beta x_2}$  où  $A, B, \alpha, \beta, k$  et  $\omega$  sont des constantes réelles strictement positives.

- 5) Quelles relations doivent vérifier les constantes pour que  $\underline{u}$  soit solution des équations.
- 6) Écrire les relations traduisant les conditions aux limites  $\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0}$  en  $x_2 = 0$ .
- 7) En déduire une relation entre  $k, \alpha, \beta$  et les coefficients de Lamé.
- 8) En déduire que  $\omega$  est la racine d'un polynôme de degré trois que l'on explicitera.

## Corrigé Ondes élastiques

**1)** Ce champ de déplacement est irrotationnel. Sa divergence  $d = \Delta \phi$  vérifie  $\Delta d = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$ . Comme  $\Delta \phi = -k^2 \phi$  avec  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  et donc  $\Delta \phi = -k^2 d$ , la relation de dispersion  $\omega^2 = c_1^2 (k_1^2 + k_2^2)$  doit être vérifiée. **2)** Les iso- $\phi$  sont des droites perpendiculaires à  $(k_1, k_2)$  dans le plan  $Ox_1x_2$ . Elles se propagent à la vitesse  $c_p = \omega/k = c_1$  dans la direction parallèle à  $(k_1, k_2, 0)$ . Le champ de déplacement est parallèle à ce vecteur. Il s'agit d'une onde longitudinale. **3)** Ce champ de déplacement est à divergence nulle. Son rotationnel  $\underline{r} = (0, \Delta \psi, 0)$  vérifie  $\Delta \underline{r} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}$ . Comme

$\Delta\psi = -k^2\psi$  avec  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  et donc  $\Delta r = -k^2 r$ , la relation de dispersion  $\omega^2 = c_2^2(k_1^2 + k_2^2)$  doit être vérifiée. **4)** Les iso- $\psi$  sont des droites perpendiculaires à  $(k_1, k_2)$  dans le plan  $Ox_1x_2$ . Elles se propagent à la vitesse  $c_p = \omega/k = c_2$  dans la direction parallèle à  $(k_1, k_2, 0)$ . Le champ de déplacement est perpendiculaire à ce vecteur. Il s'agit d'une onde transversale. **5)** On doit avec  $\Delta d = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$  avec  $d = \Delta\phi$  et  $\Delta r = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$  avec  $r = (0, \Delta\psi, 0)$ . En reportant l'expression de  $\phi$  et  $\psi$  dans ces équations, on obtient  $\omega^2 = c_2^2(k^2 - \alpha^2)$  et  $\omega^2 = c_1^2(k^2 - \beta^2)$ . **6)** On a  $\sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1})$ ,  $\sigma_{22} = \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu) u_{2,2}$  et  $\sigma_{33} = 0$ . On en déduit  $-A(k^2 + \alpha^2) + 2Bk\beta = 0$  et  $-2\mu\alpha kA + [(\lambda + 2\mu)\beta^2 - \lambda k^2]B = 0$ . **7)** Puisque  $A$  et  $B$  sont non nuls, le déterminant du système linéaire 2x2 qu'ils satisfont doit être nul. Ceci s'écrit  $(\alpha^2 + k^2)[(\lambda + 2\mu)\beta^2 - \lambda k^2] = 4\mu\alpha\beta k^2$ . **8)** En élevant la dernière relation au carré et en remplaçant  $\alpha^2 = k^2 - \omega^2/c_2^2$  et  $\beta^2 = k^2 - \omega^2/c_1^2$  par leur expression en fonction de  $\omega$ , on obtient la relation  $(2 - X)^4 = 16(1 - X)(1 - \xi X)$  avec  $X = \frac{\omega^2}{c_2^2 k^2}$  et  $\xi = c_2^2/c_1^2$ . On a utilisé les relations  $\frac{\lambda+2\mu}{\mu} = c_1^2/c_2^2$  et  $\frac{\lambda}{\mu} = c_1^2/c_2^2 - 2$ . Comme  $X = 0$  est une racine évidente, on écrit  $(X - 2)^4 - 16 = [(X - 2)^2 - 4][(X - 2)^2 + 4] = (X^2 - 4X)(X^2 - 4X + 8) = 16\xi X^2 - 16(1 + \xi)X$ . En simplifiant par  $X$ , on obtient  $P(X) = X^3 - 8X^2 + (24 - 16\xi)X - 16(1 - \xi) = 0$ . Comme  $c_2 < c_1$ , on a donc  $\xi < 1$ . La cubique  $X^3 - 8X^2$  et de la droite  $16(1 - \xi) - (24 - 16\xi)X$  n'ont qu'une seule intersection comme le montre un tracé graphique. Comme  $P(0) = -16(1 - \xi) < 0$  et  $P(1) = 1$ , le polynôme  $P(X)$  admet une racine réelle unique  $X_1 \in [0, 1]$ . La relation de dispersion des ondes de Rayleigh est alors  $\omega = \pm\sqrt{X_1} c_2 k$ . Leur vitesse de propagation est plus petite que  $c_2$ .

### EXERCICE 5.2 Réflexion d'une onde solide primaire sur une surface libre

On considère l'équation de Lamé  $\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u}$  (parfois appelée équation de Navier) où  $\underline{u}(\underline{x}, t)$ , avec  $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$ , est le champ de déplacement d'un milieu élastique semi-infini contenu dans le demi-espace d'équation  $x_2 \leq 0$ . On rappelle que la loi de Hooke relie le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  au tenseur des petites déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$  par la relation  $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$ . On note  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  et  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ . On suppose que la surface  $x_2 = 0$  est libre, ce qui implique que les forces de contacts  $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_2$  y sont nulles, en négligeant la pression atmosphérique. On s'intéresse au champ de déplacement  $\underline{u} = \underline{u}^I + \underline{u}^D + \underline{u}^R$  tel que

$$\begin{aligned} \underline{u}^I &= \underline{A}^I \exp(i \underline{k}^I \cdot \underline{x} - i \omega_I t), \quad \underline{u}^D = \underline{A}^D \exp(i \underline{k}^D \cdot \underline{x} - i \omega_D t), \quad \underline{u}^R = \underline{A}^R \exp(i \underline{k}^R \cdot \underline{x} - i \omega_R t), \\ \underline{A}^I &= A_I (\sin \theta_I \underline{e}_1 + \cos \theta_I \underline{e}_2), \quad \underline{A}^D = A_D (\sin \theta_D \underline{e}_1 - \cos \theta_D \underline{e}_2), \quad \underline{A}^R = A_R (\cos \theta_R \underline{e}_1 + \sin \theta_R \underline{e}_2), \\ \underline{k}^I &= k_I (\sin \theta_I \underline{e}_1 + \cos \theta_I \underline{e}_2), \quad \underline{k}^D = k_D (\sin \theta_D \underline{e}_1 - \cos \theta_D \underline{e}_2), \quad \underline{k}^R = k_R (\sin \theta_R \underline{e}_1 - \cos \theta_R \underline{e}_2), \end{aligned}$$

où  $A_I$  est un nombre réel,  $A_D$  et  $A_R$  deux nombres complexes,  $\theta_I, \theta_D$  et  $\theta_R$  trois angles compris dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $k_I, k_D$  et  $k_R$  trois nombres réels positifs et  $\omega_I, \omega_D$  et  $\omega_R$  trois nombres réels positifs. On suppose que  $\underline{u}^I$  est connu et l'on cherche à déterminer  $\underline{u}^D$  et  $\underline{u}^R$  de sorte que  $\underline{u}$  soit solution de l'équation de Lamé avec conditions de surface libre.

- 1) Décrire les plans de phase respectifs des ondes planes  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^D$  et  $\underline{u}^R$  dans le demi-espace  $x_2 \leq 0$  où elles se propagent.
- 2) Exprimer la divergence et le rotationnel des trois champs de déplacement  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^D$  et  $\underline{u}^R$ .
- 3) Pour chacun de ces trois ondes planes, indiquer leur nature longitudinale ou transversale.
- 4) En déduire l'expression de  $\omega_I, \omega_D$  et  $\omega_R$  en fonction des nombres d'ondes et de  $c_1$  ou  $c_2$ .
- 5) On note  $u_1(\underline{x}, t)$  et  $u_2(\underline{x}, t)$  les composantes du champ de déplacement  $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2$ . Montrer que, pour tout  $\underline{x}$  tel que  $x_2 = 0$ , on a  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$  et  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + F \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$  où  $E$  et  $F$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ .
- 6) On note  $\varphi_L(x_1, t) = k_L x_1 \sin \theta_L - \omega_L t$ ,  $G_L = (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_1)(\underline{k}^L \cdot \underline{e}_2) + (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_2)(\underline{k}^L \cdot \underline{e}_1)$  et

$H_L = \lambda (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_1) (\underline{k}^L \cdot \underline{e}_1) + (\lambda + 2\mu) (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_2) (\underline{k}^L \cdot \underline{e}_2)$  avec  $L \in \{I, D, R\}$ . Exprimer les conditions aux limites à l'aide des sommes  $\sum_{L \in \{I, D, K\}} G_L e^{i\varphi_L}$  et  $\sum_{L \in \{I, D, K\}} H_L e^{i\varphi_L}$ .

7) En déduire que  $k_D = k_I$ ,  $k_R c_2 = k_I c_1$ ,  $\theta_D = \theta_I$  et  $c_1 \sin \theta_R = c_2 \sin \theta_I$ .

8) On note  $\Lambda_D = A_D/A_I$  et  $\Lambda_R = A_R/A_I$ . Montrer que ces coefficients vérifient les relations

$$\Lambda_R \frac{\cos(2\theta_R)}{\xi \sin(2\theta_I)} + \Lambda_D = 1 \quad \text{et} \quad \Lambda_R \frac{\sin(2\theta_R)}{\xi \cos(2\theta_I) - 2\xi + 1/\xi} - \Lambda_D = 1,$$

où  $\xi$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $c_1$  et  $c_2$  uniquement.

9) Interpréter physiquement les calculs effectués. Montrer qu'en ajoutant à  $\underline{u}$  une onde de Rayleigh on obtient une nouvelle solution du problème. En déduire qu'une onde incidente transversale ou longitudinale ne peut pas se réfléchir en une onde de Rayleigh.

### Corrigé Réflexion d'une onde solide primaire sur une surface libre

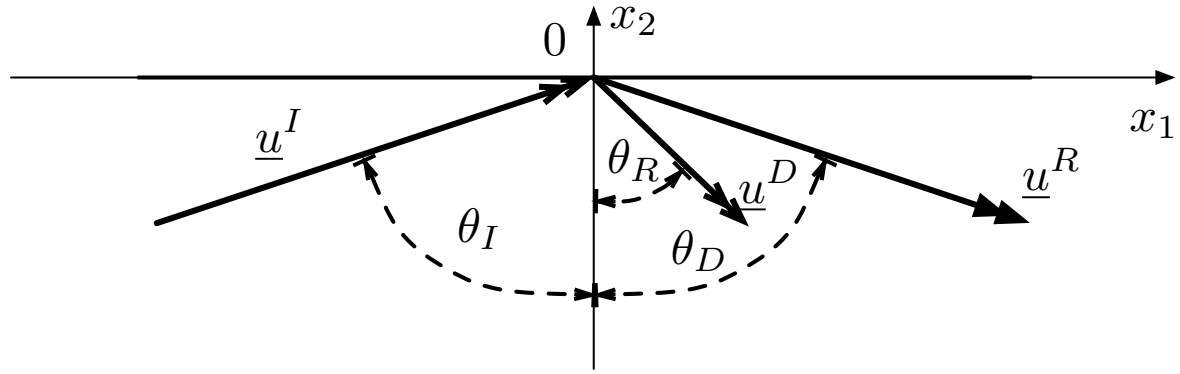


FIGURE 5.6 – Réflexion d'une onde plane longitudinale en deux ondes planes.

**1)** Les plans de phase des ondes  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^D$  et  $\underline{u}^R$  sont respectivement normaux aux vecteurs d'ondes  $\underline{k}^I$ ,  $\underline{k}^D$  et  $\underline{k}^R$ . **2)** On a  $\text{div } \underline{u}^I = i \underline{k}^I \cdot \underline{u}^I$  et  $\text{rot } \underline{u}^I = \underline{0}$ ,  $\text{div } \underline{u}^D = i \underline{k}^D \cdot \underline{u}^D$  et  $\text{rot } \underline{u}^D = \underline{0}$ ,  $\text{div } \underline{u}^R = 0$  et  $\text{rot } \underline{u}^R = i \underline{k}^R \wedge \underline{u}^R$ . **3)** Les ondes planes  $\underline{u}^I$  et  $\underline{u}^D$  sont longitudinales tandis que l'onde plane  $\underline{u}^R$  est transversale. **4)** On a donc  $\omega_I = c_1 k_I$ ,  $\omega_D = c_1 k_D$  et  $\omega_R = c_2 k_R$ . **5)** Les forces de contacts exercées par l'atmosphère sur la surface libre d'équation  $x_2 = 0$  sont  $\underline{T} = \underline{\sigma} \underline{e}_2 = \sigma_{12} \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 = \underline{0}$  avec  $\sigma_{12} = \lambda \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$  et  $\sigma_{22} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ . On obtient donc les valeurs  $E = 1$  et  $F = (\lambda + 2\mu)/\mu$ . **6)** Les conditions aux limites de surface libre s'écrivent  $\sum_{L \in \{I, D, K\}} G_L e^{i\varphi_L} = 0$  et  $\sum_{L \in \{I, D, K\}} H_L e^{i\varphi_L} = 0$ . **7)** Comme elles sont valables pour tout  $x_1$  et tout  $t$ , on doit avoir  $k_I \sin \theta_I = k_D \sin \theta_D = k_R \sin \theta_R$  et  $\omega_I = \omega_D = \omega_R =: \omega$ . Comme  $\omega_I = c_1 k_I$ ,  $\omega_D = c_1 k_D$  et  $\omega_R = c_2 k_R$ , on a  $k_D = k_I$ ,  $\theta_I = \theta_D$ ,  $c_2 k_R = c_1 k_I$  et  $c_1 \sin \theta_R = c_2 \sin \theta_I$ . **8)** On a  $G_I = A_I k_I \sin(2\theta_I)$ ,  $G_D = A_D k_D \sin(2\theta_D)$  et  $G_R = A_R k_R \cos(2\theta_R)$ . On a de plus  $H_I = A_I k_I [\lambda + \mu + \mu \cos(2\theta_I)]$ ,  $H_D = A_D k_D [\lambda + \mu + \mu \cos(2\theta_D)]$  et  $H_R = -A_R k_R \mu \sin(2\theta_R)$ . Comme  $\theta_I = \theta_D$ ,  $k_I = k_D$ ,  $k_I = \omega/c_1$ ,  $k_R = \omega/c_2$ ,  $\mu = \rho c_2^2$  et  $\lambda = \rho(c_1^2 - 2c_2^2)$ , on obtient les relations recherchées avec  $\xi = c_2/c_1$ . **9)** Une onde plane longitudinale  $\underline{u}^I$  arrivant de manière oblique sur la surface libre se réfléchit en la somme d'une onde plane longitudinale  $\underline{u}^D$  et d'une onde plane transversale  $\underline{u}^R$ . Les angles de réflexion obéissent à la loi de Snell. Comme une onde de Rayleigh vérifie naturellement les conditions aux limites en surface, elle ne peut être générée par la réflexion d'une autre onde et peut être ajoutée de manière arbitraire à toute solution, le problème étant linéaire.

**EXERCICE 5.3** Réflexion d'une onde élastique sur une surface libre

On considère un solide élastique contenu dans le demi-espace  $x_2 \leq 0$  et on note  $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$ . On s'intéresse à des champs de déplacement 2D de la forme  $\underline{u}(x_1, x_2, t) = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2$ . On note ici  $\underline{e}(\theta) = \sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$ .

- 1) On suppose que la contrainte normale à la surface est nulle. À partir de la loi de Hooke, de coefficient de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . On note  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  et  $\beta = \frac{c_1}{c_2}$ . Montrer que  $u_{1,2} + \alpha_1 u_{2,1} = 0$  et  $u_{1,1} + \alpha_2 u_{2,2} = 0$  en  $y = 0$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction de  $\beta$ .
- 2) On suppose qu'une onde plane longitudinale  $\underline{u}_I$  d'amplitude réelle  $A_I$  et de vecteur d'onde  $\underline{k}_I = k_I \underline{e}(\theta_I)$  avec  $\theta_I \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  se réfléchit en une onde plane longitudinale  $\underline{u}_D$  d'amplitude réelle  $A_D$  et de vecteur d'onde  $\underline{k}_D = k_D \underline{e}(\pi - \theta_D)$  avec  $\theta_D \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  ainsi qu'une onde plane transversale  $\underline{u}_R$  d'amplitude réelle  $A_R$  et de vecteur d'onde  $\underline{k}_R = k_R \underline{e}(\pi - \theta_R)$  avec  $\theta_R \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , le déplacement transversal étant orienté dans la direction  $\underline{e}(\frac{\pi}{2} - \theta_R)$ . Écrire une solution complexe  $\underline{u}(x_1, x_2, t)$  des équations de Lamé sous la forme d'une somme  $\underline{u} = \underline{u}_I + \underline{u}_D + \underline{u}_R$  en explicitant les expressions de ces trois ondes en fonction des  $\underline{e}(\theta)$  de  $\underline{x}$  ou de leur produits scalaires  $\underline{e}(\theta) \cdot \underline{x}$ .
- 3) Expliciter les conditions aux limites en  $y = 0$  et montrer que  $\theta_D = \theta_I$  et  $\gamma \sin \theta_R = \sin \theta_I$  où  $\gamma$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\beta$ . On pourra noter  $\phi_I = k_I(x_1 \sin \theta_I + x_2 \cos \theta_I - c_1 t)$ ,  $\phi_D = k_D(x_1 \sin \theta_D - x_2 \cos \theta_D - c_1 t)$  et  $\phi_R = k_R(x_1 \sin \theta_R - x_2 \cos \theta_R - c_2 t)$ . On pourra également noter  $\varphi_I = k_I(x_1 \sin \theta_I - c_1 t)$ ,  $\varphi_D = k_D(x_1 \sin \theta_D - c_1 t)$  et  $\varphi_R = k_R(x_1 \sin \theta_R - c_2 t)$ .
- 4) Montrer que  $X_D = A_D/A_I$  et  $X_R = A_R/A_I$  sont solutions d'un système linéaire inhomogène que l'on explicitera à l'aide des coefficients  $a_1 = \beta \cos(2\theta_R)/\sin(2\theta_I)$  et  $a_2 = \beta \sin(2\theta_R)/\left[\frac{\beta^2+1}{\beta^2-1} + \cos(2\theta_I)\right]$ .

**Corrigé** Réflexion d'une onde élastique sur une surface libre

1) La loi de Hooke  $\underline{\sigma} = \lambda(\text{tr } \underline{e}) \underline{I} + 2\mu \underline{e}$  et la condition aux limites de surface  $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_2 = \underline{0}$  entraînent  $\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) \underline{e}_2 + \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \underline{e}_1 + 2\mu u_{2,2} \underline{e}_2 = \underline{0}$  et donc  $u_{1,2} + u_{2,1} = 0$  et  $\lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu) u_{2,2} = 0$ . On a donc  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = \beta^2$ . 2) On a  $\underline{u}_I = A_I \underline{e}(\theta_I) e^{i k_I [\underline{e}(\theta_I) \cdot \underline{x} - c_1 t]}$ ,  $\underline{u}_D = A_D \underline{e}(\pi - \theta_D) e^{i k_D [\underline{e}(\pi - \theta_D) \cdot \underline{x} - c_1 t]}$  et  $\underline{u}_R = A_R \underline{e}(\frac{\pi}{2} - \theta_R) e^{i k_R [\underline{e}(\pi - \theta_R) \cdot \underline{x} - c_2 t]}$ . 3) On a  $u_1 = A_I \sin \theta_I e^{i \phi_I} + A_D \sin \theta_D e^{i \phi_D} + A_R \cos \theta_R e^{i \phi_R}$  et  $u_2 = A_I \cos \theta_I e^{i \phi_I} - A_D \cos \theta_D e^{i \phi_D} + A_R \sin \theta_R e^{i \phi_R}$  avec  $\phi_I = k_I(x_1 \sin \theta_I + x_2 \cos \theta_I - c_1 t)$ ,  $\phi_D = k_D(x_1 \sin \theta_D - x_2 \cos \theta_D - c_1 t)$  et  $\phi_R = k_R(x_1 \sin \theta_R - x_2 \cos \theta_R - c_2 t)$ . On a donc  $u_{1,2} + u_{2,1} = 2A_I k_I \sin \theta_I \cos \theta_I e^{i \varphi_I} - 2A_D k_D \sin \theta_D \cos \theta_D e^{i \varphi_D} + A_R i k_R (-\cos^2 \theta_R + \sin^2 \theta_R) e^{i \varphi_R} = 0$  et  $u_{1,1} + \beta^2 u_{2,2} = A_I k_I (\sin^2 \theta_I + \beta^2 \cos^2 \theta_I) e^{i \varphi_I} + A_D i k_D (\sin^2 \theta_D + \beta^2 \cos^2 \theta_D) e^{i \varphi_D} + A_R i k_R (\cos \theta_R \sin \theta_R - \beta^2 \sin \theta_R \cos \theta_R) e^{i \varphi_R} = 0$  avec  $\varphi_I = k_I(x_1 \sin \theta_I - c_1 t)$ ,  $\varphi_D = k_D(x_1 \sin \theta_D - c_1 t)$  et  $\varphi_R = k_R(x_1 \sin \theta_R - c_2 t)$ . Comme cette relation est vraie pour tout  $x$  et pour tout  $t$ , on doit donc avoir  $\varphi_I = \varphi_R = \varphi_D$ . On a donc  $k_I c_1 = k_D c_1 = k_R c_2$  et  $k_I \sin \theta_I = k_D \sin \theta_D = k_R \sin \theta_R$ , ce qui entraîne  $\sin \theta_I = \sin \theta_D = \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_R$ . On a donc  $\theta_I = \theta_D$  et  $\gamma = \beta$ . 4) On a  $\sin(2\theta_I) X_D + \beta \cos(2\theta_R) X_R = \sin(2\theta_I)$  et  $[(\beta^2 + 1) + (\beta^2 - 1) \cos(2\theta_I)] X_D + \beta(\beta^2 - 1) \sin(2\theta_I) X_R = [(\beta^2 + 1) + (\beta^2 - 1) \cos(2\theta_R)]$ . On a donc  $X_D + a_1 X_R = 1$  et  $-X_D + a_2 X_R = 1$

**EXERCICE 5.4** Réflexion et transmission des ondes élastiques

Dans le repère  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , on considère un milieu élastique infini résultant de la soudure d'un matériau (a), situé en  $x < 0$ , de masse volumique  $\rho_a$  et de coefficients de Lamé  $\lambda_a$  et  $\mu_a$  et d'un matériau (b), situé en  $x > 0$ , de masse volumique  $\rho_b$  et de coefficients de Lamé  $\lambda_b$  et  $\mu_b$ .

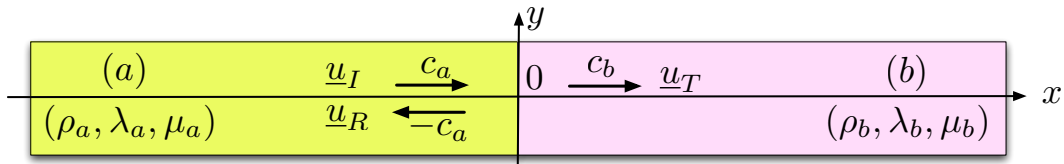


FIGURE 5.7 – Réflexion et transmission d’une onde élastique  $\underline{u}_I(x, t)$  par une discontinuité en  $x = 0$ .

On note  $\underline{u} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$  le champ de déplacement et on s’intéresse à la réflexion et à la transmission d’une onde élastique incidente  $\underline{u}_I(x, t)$  par cette discontinuité en  $x = 0$  (figure 5.7).

- 1) À partir des équations de Lamé  $\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u}$ , calculer, pour chacun des milieux, les vitesses de propagation respectives  $c_{1a}$  et  $c_{1b}$  des ondes longitudinales ainsi que vitesses de propagation respectives  $c_{2a}$  et  $c_{2b}$  des ondes transversales.
- 2) Le tenseur des contraintes étant donné par la loi de Hooke  $\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2 \mu \underline{\epsilon}$ , retrouver sans calcul l’expression de  $\text{div} \underline{\sigma}$ . Que représente le tenseur  $\underline{\epsilon}$ ?
- 3) En notant  $\underline{\sigma}_a(x, y, z, t)$  et  $\underline{\sigma}_b(x, y, z, t)$  les tenseurs des contraintes respectifs des milieux (a) et (b), exprimer la relation de continuité des efforts de contact à l’interface  $x = 0$ .
- 4) Quelle est la deuxième relation vectorielle de continuité que l’on doit imposer sur cette interface en notation  $\underline{u}_a$  et  $\underline{u}_b$  les champs de déplacement respectifs des deux milieux?

**Corrigé**      **Réflexion et transmission des ondes élastiques**

1) On a  $c_{1a} = \sqrt{\frac{\lambda_a + 2\mu_a}{\rho_a}}$ ,  $c_{2a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\rho_a}}$ ,  $c_{1b} = \sqrt{\frac{\lambda_b + 2\mu_b}{\rho_b}}$  et  $c_{2b} = \sqrt{\frac{\mu_b}{\rho_b}}$ . 2) On a  $\text{div} \underline{\sigma} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u}$ . Le tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}$  a pour composantes  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ . 3) On doit avoir  $\underline{\sigma}_a(0, y, z, t) \cdot \underline{e}_x = \underline{\sigma}_b(0, y, z, t) \cdot \underline{e}_x$  4) On doit avoir  $\underline{u}_a(0, y, z, t) = \underline{u}_b(0, y, z, t)$ .

**Onde incidente longitudinale**

5) Comme les ondes sont longitudinales, on doit avoir  $c_a = c_{1a}$  et  $c_b = c_{1b}$ . 6) La continuité du déplacement en  $x = 0$  entraîne  $f_I(-c_a t) + f_R(c_a t) = f_T(-c_b t)$ . 7) La seule composante non nulle de  $\underline{\epsilon}$  est  $e_{xx} = u_{,x}$ , c’est-à-dire  $u_{a,x} = f'_I(x - c_a t) + f'_R(x + c_a t)$  pour  $x < 0$  et  $u_{b,x} = f'_T(x - c_b t)$  pour  $x > 0$ . La force de contact exercée sur l’interface est  $-(\lambda_a + 2\mu_a) u_{a,x}(0, t) \underline{e}_x$  pour le milieu (a) et  $(\lambda_b + 2\mu_b) u_{b,x}(0, t) \underline{e}_x$  pour le milieu (b). 8) La continuité des forces de contact en  $x = 0$  entraîne  $(\lambda_a + 2\mu_a)[f'_I(-c_a t) + f'_R(c_a t)] = (\lambda_b + 2\mu_b) f'_T(-c_b t)$ . 9) L’intégration par rapport au temps de la relation précédente entraîne  $(\lambda_a + 2\mu_a)[- \frac{1}{c_a} f_I(-c_a t) + \frac{1}{c_a} f_R(c_a t)] = - \frac{1}{c_b} (\lambda_b + 2\mu_b) f_T(-c_b t)$ . Comme  $c_a = c_{1a} = \sqrt{\frac{\lambda_a + 2\mu_a}{\rho_a}}$  et  $c_b = c_{1b} = \sqrt{\frac{\lambda_b + 2\mu_b}{\rho_b}}$ , on en déduit  $\alpha = \frac{c_a (\lambda_b + 2\mu_b)}{c_b (\lambda_a + 2\mu_a)} = \sqrt{\frac{\rho_a (\lambda_b + 2\mu_b)}{\rho_b (\lambda_a + 2\mu_a)}}$ . 10) On a  $R = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ ,  $T = \frac{2}{\alpha + 1}$ ,  $\beta = \frac{c_a}{c_b}$  et  $\gamma = -1$ . On a bien  $R + T = 1$ . 11) Le cas  $\rho_a (\lambda_a + 2\mu_a) \gg \rho_b (\lambda_b + 2\mu_b)$  s’écrit  $\alpha \gg 1$  et conduit à  $R = 1$  et  $T = 0$ . L’onde incidente est complètement réfléchiée par un solide presque indéformable et l’interface est un noeud pour le déplacement qui s’y annule. Le cas  $\rho_a (\lambda_a + 2\mu_a) \ll \rho_b (\lambda_b + 2\mu_b)$  s’écrit  $\alpha \ll 1$  et conduit à  $R = -1$  et  $T = 2$ . L’onde incidente est complètement réfléchiée en présence d’un solide très déformable et l’interface est un ventre pour le déplacement qui est presque libre. Une onde d’intensité double se propage alors dans le milieu souple.

### Onde incidente transversale

**12)** Comme les ondes sont longitudinales, on doit avoir  $c_a = c_{2a}$  et  $c_b = c_{2b}$ . **13)** La continuité du déplacement en  $x = 0$  entraîne  $f_I(-c_a t) + f_R(c_a t) = f_T(-c_b t)$ . Les seules composantes non nulles de  $\underline{e}$  sont  $e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}v_{,x}$ . La continuité des forces de contact en  $x = 0$  entraîne  $\mu_a[f_I'(-c_a t) + f_R'(c_a t)] = \mu_b f_T'(-c_b t)$ . L'intégration par rapport au temps de la relation précédente entraîne  $\alpha = \frac{c_a \mu_b}{c_b \mu_a} = \sqrt{\frac{\rho_a \mu_a}{\rho_b \mu_b}}$ . **14)** Comme précédemment on a  $R = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$  et  $T = \frac{2}{\alpha+1}$ .

### EXERCICE 5.5 Ondes élastiques stationnaires

On note  $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$  un point de l'espace et on s'intéresse à des champs de déplacement de la forme  $\underline{u}(x_1, t) = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2$  pour un solide élastique occupant l'espace  $0 \leq x_1 \leq l$  où  $l$  compris entre deux plaques planes d'équations respectives  $x_1 = 0$  et  $x_1 = l$ .

- 1) Rappeler brièvement la détermination des vitesses  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  et  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  à partir des équation de Lamé  $\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u}$ .
- 2) On suppose que  $u_2 = 0$  et  $u_1 = \sin(k x_1) \sin(\omega t)$  avec  $k = \pi/l$ . Calculer  $\omega$ .
- 3) On suppose que  $u_1 = 0$  et  $u_2 = \cos(k x_1) \sin(\omega t)$  avec  $k = \pi/l$ . Calculer  $\omega$ .
- 4) Calculer les contraintes  $\underline{T}$  exercées par les plaques sur le solide dans pour chacun des questions précédentes

### Corrigé Ondes élastiques stationnaires

**1)** En prenant la divergence puis le rotationnel de l'équation de Navier, on obtient respectivement une équation des ondes pour la divergence  $d$  ou le rotationnel  $\underline{r}$  du champ de déplacement, avec les vitesses respectives  $c_1$  et  $c_2$ . **2)** Il s'agit d'une onde stationnaire longitudinale, d'où  $\omega_1 = k c_1$ . **3)** Il s'agit d'une onde stationnaire transversale, d'où  $\omega_2 = k c_2$ . **4)** En utilisant la loi de Hooke, on obtient  $\underline{T} = (\lambda + 2\mu) k \sin(\omega_1 t) \underline{e}_1$  pour l'onde stationnaire longitudinale et  $\underline{T} = \underline{0}$  pour l'onde stationnaire transversale.