

# Optimisation d'un trafic routier BE avec simulateur

## Présentation du problème



Figure 1: La circulation des voitures dans la ville de Blue City.

La ville de Blue City est traversée par une route à grande circulation (figure 1). Les habitants ont cependant le besoin de traverser fréquemment cette route. La solution choisie a été d'installer un feu permettant d'arrêter la circulation. Cet arrêt crée néanmoins un embouteillage. L'objectif est d'offrir aux habitants un temps de traversée de la route le plus long possible, tout en empêchant le bouchon de voiture de se propager sur une distance trop importante. Pour ce faire, vous pourrez agir sur le réglage du feu : durée de l'état « vert » (circulation libre des voitures) et durée de l'état « rouge » (circulation bloquée).

À la fin de votre mission, vous devrez être en mesure de répondre aux questions suivantes :

- Quelle longueur atteint le bouchon lorsque vous maintenez le feu au rouge pendant 24 secondes ?
- Combien de temps le feu doit-il ensuite rester au vert pour pouvoir l'évacuer entièrement ?
- Comment régler le feu rouge pour que l'extension du bouchon ne dépasse pas 120 m ?

## Partie 1 : Modélisation

L'ensemble des voitures est modélisé par un fluide dont la densité, en voitures par mètre, est notée  $\rho(x, t)$  (figure 2). La vitesse du fluide est notée  $V$  et le débit, en voitures par seconde, est noté  $q$ . On suppose que la vitesse  $V$  est donnée par :

$$V = V_m \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) \quad (1)$$

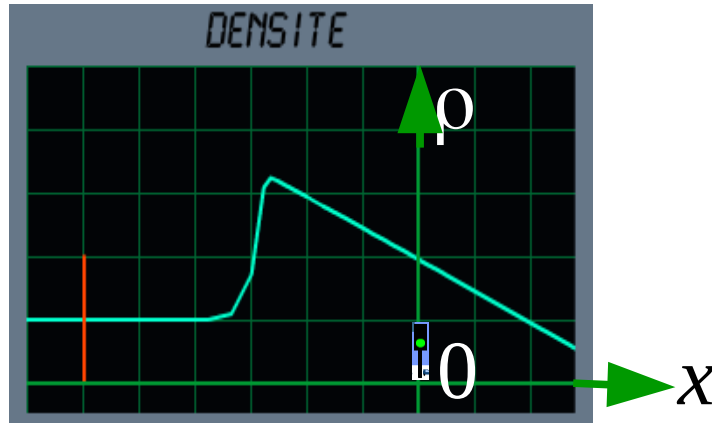


Figure 2: Densité correspondant à la circulation figure 1. Le feu est positionné en  $x=0$ .

Lorsque les voitures sont à l'arrêt, elles sont éloignées d'une distance  $L$  (figure 3). La densité est alors maximale et est notée  $\rho_m$ .



Figure 3: Voitures à l'arrêt.

**Q1 :** Exprimez  $\rho_m$  en fonction de  $L$ .

Lors d'une circulation uniforme, les voitures sont éloignées d'une distance  $L+D$  (figure 4).

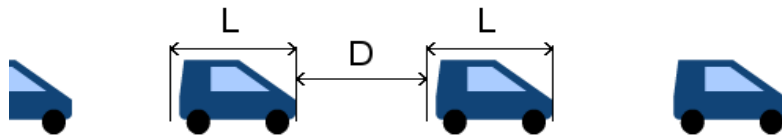


Figure 4: Voitures en circulation uniforme.

**Q2 :** Exprimez alors  $\rho$  en fonction de  $L$  et  $D$ .

**Q3 :** Exprimez  $q$  en fonction de  $\rho$  et  $V$ .

**Q4 :** Tracez les courbes de  $V$  et de  $q$  en fonction de  $\rho$  (position arbitraire du maximum de  $q$ ).

**Q5 :** Exprimez  $q_m$ , la valeur maximale du débit, en fonction de  $\rho_m$  et  $V_m$ .

**Q6 :** On note la densité de voiture du simulateur lorsque le feu reste au vert pendant un temps très long (circulation initiale non perturbée). Mesurez  $L$ ,  $D$  et  $V$  pour cette densité et calculez  $\rho_1$ ,  $V_1$ ,  $q_1$ ,  $\rho_m$ ,  $V_m$  et  $q_m$ .

On suppose que  $\rho$  et  $q$  sont reliés par la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

**Q7 :** Que signifie cette équation ?

**Q8 :** On met l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Exprimez  $c(\rho)$ .

**Q9 :** Tracez  $c$  en fonction de  $\rho$ .

**Q10 :** On considère les courbes caractéristiques définies par  $\frac{dX}{dt} = c[\rho(X, t)]$ .

Calculez  $\frac{d}{dt}[\rho(X(t), t)]$ .

**Q11 :** Pourquoi les courbes caractéristiques sont-elles des droites ?

## Partie 2 : Onde de détente

On suppose  $\rho_m = 0,25$  voitures/m,  $V_m = 20$  m/s et que la circulation non perturbée, en amont de la ville, correspond aux valeurs  $\rho_1 = \rho_m/4$  et  $V_1 = 15$  m/s. On vérifiera que ces valeurs correspondent à celles du simulateur.

On désire étudier le passage au vert du feu, après que le feu soit resté rouge un temps infini (figure 5). Au bout de quelques instants, la circulation reprend (figure 6). Les courbes de densité correspondantes sont tracées figure 7.



Figure 5: Le feu est resté rouge un temps infini.

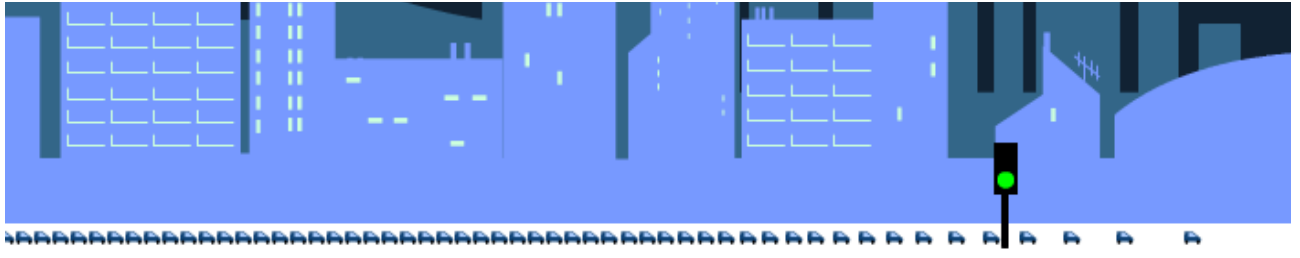


Figure 6: Le feu est passé au vert.

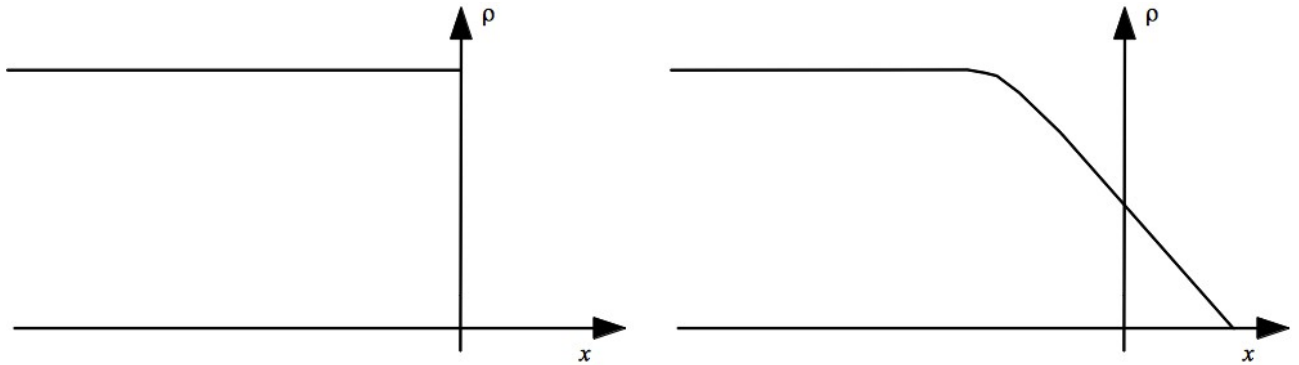


Figure 7: Densité initiale (gauche) et après quelques instants (droite)

Réalisez cette configuration avec le simulateur et observez l'évolution de la densité de voiture.

**Q12 :** On note  $t_0=0$  s,  $t_1=1$  s,  $t_2=2$  s et  $t_3=3$  s. Sur la feuille de réponse associée, tracez les courbes caractéristiques passant par  $t=t_1$  par les points  $x= -60$  m,  $-40$  m,  $-20$  m,  $-10$  m,  $10$  m,  $20$  m,  $40$  m et  $60$  m. On utilisera les valeurs de l'énoncé.

**Q13 :** Dédurre des courbes caractéristiques les courbes de densité et les tracer sur la même figure pour  $t=t_0, t_2$  et  $t_3$ .

**Q14 :** A l'aide du simulateur, mesurez la densité et la vitesse au niveau du feu. Ce résultat est-il en accord avec la théorie des caractéristiques ?

**Q15 :** En déduire la valeur du débit au niveau du feu.

**Q16 :** À quelle vitesse l'information « le feu est passé au vert » se propage vers l'arrière ? Et vers l'avant ?

**Q17 :** Observation simulateur. Au bout de combien de temps une voiture située à  $120$  m se met-elle à bouger ? Détaillez votre protocole de mesure et comparez avec la valeur théorique.

### Partie 3 : Création du bouchon

On désire calculer la vitesse d'allongement du bouchon créée par le passage du feu au rouge lors d'une circulation initialement uniforme (figure 8). La densité correspondante est tracée figure 9.

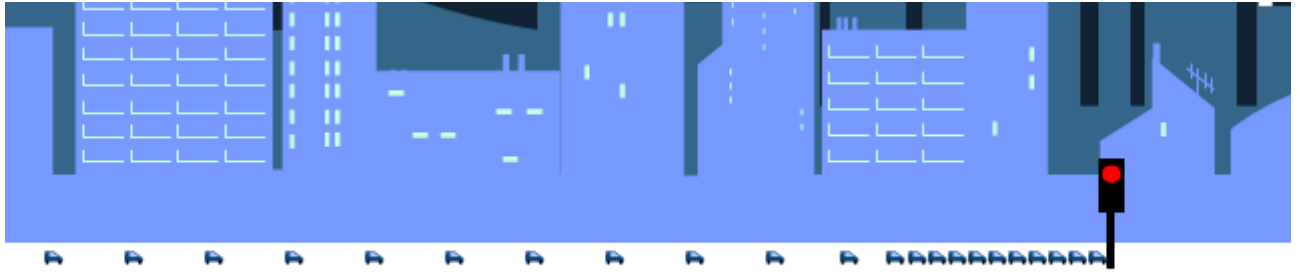


Figure 8: Bouchon formé par le passage du feu au rouge.

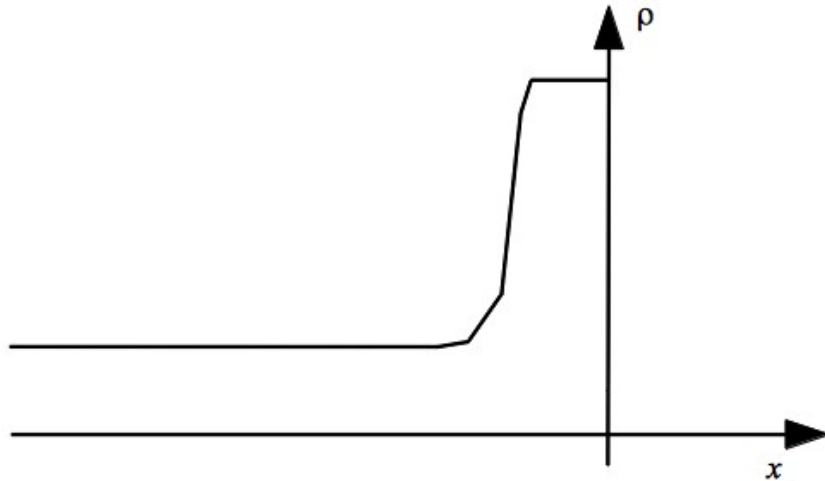


Figure 9: Densité correspondante au bouchon.

**Q18 :** Dans cette configuration un choc se forme. Pourquoi ?

**Q19 :** Exprimez la vitesse du choc  $w$  en fonction de  $q^-$ ,  $\rho^-$  les valeurs du débit et de la densité tout de suite à gauche du choc, et  $q^+$ ,  $\rho^+$  les valeurs du débit et de la densité tout de suite à droite du choc.

**Q20 :** Exprimez les valeurs de  $q^-$ ,  $\rho^-$ ,  $q^+$  et  $\rho^+$  en fonction de  $q_m$  et  $\rho_m$ . Mesurez la vitesse d'allongement du bouchon puis comparez avec la valeur théorique.

**Q21 :** Tracez sur la feuille de réponse correspondante la trajectoire du choc dans le plan  $(x, t)$ .

**Q22 :** Tracez sur la même feuille de réponse les caractéristiques passant :

- pour  $t = t_1$  par les positions  $x \in \{-40, -20, -10\} m$
- pour  $x = 0$  par les instants  $t \in \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\} s$

**Q23 :** Tracez sur la même feuille les courbes de densité pour  $t \in \{t_0; t_2; t_3\}$ .

**Q24 :** Application numérique. Calculer l'extension  $|x_A|$  du bouchon lorsque le feu passe au vert, c'est-à-dire lorsque  $t = T_R$ . Vérifiez ce résultat à l'aide du simulateur.

## Partie 4 : Évacuation du bouchon

On considère le bouchon créé par le feu mis au rouge pendant une durée  $T_R$ . La circulation est supposée initialement uniforme, de densité  $\rho_0$ . Il s'agit de calculer la durée  $T_V$  de feu vert nécessaire pour évacuer la totalité du bouchon. La trajectoire  $s(t)$  du bouchon (choc) est représentée figure 10 (points A, B, C) et son expression analytique, pour  $t > t_A$  est donné par l'expression (voir DM) :

$$\frac{s(t)}{V_m} = \left(1 - 2 \frac{\rho_1}{\rho_m}\right) (t - T_R) - 2 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_m} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_m}\right)} \sqrt{T_R (t - T_R)}. \quad (4)$$

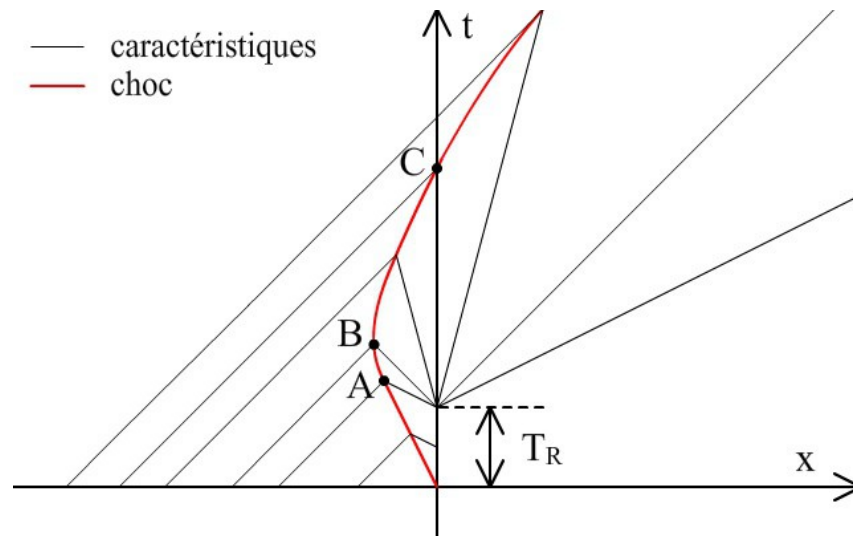


Figure 10: Trajectoire du choc.

Une image de la circulation à un instant donné est présentée figure 1 et la densité correspondante est présentée figure 2. Réalisez cette expérience avec le simulateur en choisissant arbitrairement des valeurs de  $T_R$ , et observez l'évacuation du bouchon.

**Q25:** Décrire schématiquement, en nommant les points A, B et C, la trajectoire du choc.

**Q26 :** Décrire schématiquement, l'évolution temporelle de la densité de part et d'autre du choc ?

**Q27 :** Quelle est la valeur de la densité à droite du choc lorsque celui-ci arrive au niveau du feu (point C) ? Retrouvez ce résultat à l'aide de la figure 10.

**Q28:** Au bout de combien de temps le choc commence-t-il à ralentir (point A) ? Exprimez les coordonnées  $x_A$  et  $t_A$  du point A en fonction  $T_R$  et  $V_m$ .

**Q29 :** Exprimez les densités à gauche et à droite du choc au point A en fonction de  $\rho_m$  puis comparez à vos mesures.

**Q30 :** Quelle est la valeur de la densité à gauche et à droite du choc au point B (vitesse du choc nulle) ?

**Q31 :** Quelle est la vitesse  $w$  du choc au point C ? Détaillez.

**Q32 :** En considérant le débit  $q_1$  arrivant dans la ville et connaissant le débit traversant le feu avant le passage du choc par la théorie des caractéristiques (Q15), calculer la durée  $T_V$  nécessaire

pour évacuer le bouchon créé par le passage du feu au rouge pendant la durée  $T_R$ .

### Q33 : Mesures avec le simulateur

On désire mesurer l'instant de passage du choc au niveau du feu (coordonnée  $t_C$  du point C) pour ensuite la comparer à la théorie.

- 1) Réinitialiser la position des voitures pour mettre une circulation uniforme. Réinitialiser le chronomètre.
- 2) Déplacez le radar au niveau du feu (le trait rouge vertical du radar doit être caché par le trait vert vertical représentant le feu).
- 3) Passez le feu au rouge. Lancez la simulation pour une durée de 24 secondes puis mettez la en pause. Passez alors le feu au vert.
- 4) Le radar permet d'enregistrer et d'exporter les mesures qu'il effectue. Remettez à zéro son compteur. Appuyez sur le bouton d'enregistrement (rond rouge avec l'inscription REC en dessous) pour démarrer l'enregistrement. Le radar va maintenant enregistrer toutes les mesures de vitesse qu'il effectue.
- 5) Appuyez sur le bouton play pour continuer la simulation jusqu'à que le choc soit passé devant le feu et disparu de l'écran, puis appuyez sur le bouton pause.
- 6) Appuyez de nouveau sur le bouton d'enregistrement du radar (qui est devenu un carré rouge).
- 7) Une nouvelle fenêtre est apparue avec les mesures de vitesses effectuées. Grâce à un tableur, tracez la courbe de densité en fonction du temps à l'endroit du radar.

Ajoutez sur cette courbe la courbe théorique obtenue grâce à la valeur de  $T_V$  obtenue précédemment.

Q34 : Observez les différences entre les deux courbes et commentez.

Q35 : Application numérique. En utilisant la valeur de  $T_R=24$  s, calculez la valeur de  $T_V$  correspondante pour évacuer le bouchon.

## Partie 5 : Conclusion

Q36 : Mesurez l'extension maximale du bouchon  $|x_B|$  obtenu pour le choix  $T_R=24$  s et comparez avec l'expression analytique. On a  $\frac{t_B}{T_R} = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_m} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_m}\right) \left[1 - 2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_m}\right)^2\right]^{-2}$  (voir DM).

Q37 : Quelle est la nouvelle durée de feu rouge  $T_R$  permettant de limiter  $|x_B|$  à 120 m ?

## Références

- Conception originale et évolution du BE (2012-2015) : J.-F. Parmentier, A. Harang et O. Thual
- Évolution du BE (2016-2017) : J. Mougel, M. Mercier et O. Thual
- J.-F. Parmentier et O. Thual, [Modèle de trafic routier et caractéristiques](#), Éd. Ress. Pédago. Ouv. INPT 1013 (2012) 6h