

EXERCICE 0.1 DM : Modèle de trafic routier

On considère le modèle de trafic routier $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t)$ avec $q(\rho) = \rho v(\rho)$.

On suppose que $v(\rho) = v_0(1 - \rho/\rho_{\max})$ avec $v_0 > 0$, $\rho_{\max} > 0$ et $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$. On notera $c(\rho) = q'(\rho)$ la dérivée de q par rapport à ρ .

Vitesses de propagation

- 1) Que représentent physiquement les grandeurs ρ , q et v ? Quelles sont leurs unités? Tracer la fonction $q(\rho)$ et déterminer la valeur ρ^* pour laquelle elle est maximale. Exprimer $c(\rho)$. Tracer, sur un même graphique, les fonction $v(\rho)$ et $c(\rho)$.
- 2) Dans le cas où $\rho(x, t)$ est dérivable, écrire l'équation aux dérivées partielles nonlinéaire que ce champ vérifie.
- 3) En déduire que ρ est constant le long de droites caractéristique d'équations $x = x_0 + c(\rho_0)t$ dans le plan (x, t) . En quoi $c(\rho)$ représente-t-elle la vitesse de propagation de l'information?
- 4) On suppose que le modèle décrit un choc d'équation $x = s(t)$ se déplaçant à la vitesse $w = \frac{ds}{dt}$. En notant $\rho^- = \rho[s^-(t), t]$ et $\rho^+ = \rho[s^+(t), t]$ les valeurs de ρ de part et d'autre du choc, on démontre, à partir du bilan global, que $w = \llbracket q \rrbracket / \llbracket \rho \rrbracket$ où $\llbracket \bullet \rrbracket = \bullet^+ - \bullet^-$ désigne le saut d'une grandeur \bullet à travers le choc. Exprimer la vitesse w en fonction de ρ^- et ρ^+ ainsi que des paramètres du modèle.

Adimensionnalisation du modèle

On choisit un unité de longueur L et on définit les quantités adimensionnelles suivantes :

$$X = \frac{x}{L}, T = \frac{v_0 t}{L}, R = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, V(R) = \frac{v(R \rho_{\max})}{v_0}, Q(R) = \frac{q(R \rho_{\max})}{\rho_{\max} v_0} \text{ et } C(R) = \frac{c(R \rho_{\max})}{v_0}.$$

- 5) Montrer que le modèle s'écrit alors $\frac{d}{dT} \int_{X_1}^{X_2} R(X, T) dX + [Q(X, T)]_{X_1}^{X_2} = 0$ avec $V(R) = 1 - R$ et $Q(R) = RV = R - R^2$. Dans le cas où $R(X, T)$ est dérivable, montrer que $\frac{\partial R}{\partial T} + C(R) \frac{\partial R}{\partial X} = 0$ avec $C(R) = Q'(R) = 1 - 2R$.
- 6) Tracer $V(R)$ et $C(R)$ sur un même graphe puis $Q(R)$ sur un autre.
- 7) Calculer la vitesse adimensionnelle $W = w/v_0$ d'un choc en fonction de R^+ et R^- .

Feu rouge et chocs

On suppose que $R = R_1$ pour $T \leq 0$ où $0 < R_1 < 1/2$ est une constante indépendante de l'espace et du temps. Pour $T \geq 0$, un feu rouge situé en $X = 0$ impose la condition aux limites $V[R(0^-, T)] = 0$ pour $X = 0^-$ et $R(0^+, T) = 0$ pour $T > 0$, séparant ainsi le domaine spatial en deux demi-droites disjointes.

- 8) Écrire les équations respectives des droites caractéristiques et des trajectoires dans le demi-plan $(X, T \leq 0)$. Tracer ces droites dans le cas particulier $R_1 = 1/4$.
- 9) Exprimer, en fonction de R_1 , la vitesse W_g du choc qui se propage le long de la demi-droite $X \leq 0$. Dans le quart de plan $(X \leq 0, T \geq 0)$, tracer la trajectoire de ce choc en traits doubles, les caractéristiques en traits pleins et les trajectoires des voitures en traits pointillés, en choisissant la valeur particulière $R_1 = 1/4$,
- 10) Exprimer, en fonction de R_1 , la vitesse W_d du choc qui se propage le long de la demi-droite $X \geq 0$. Dans le quart de plan $(X \geq 0, T \geq 0)$, tracer la trajectoire de ce choc en traits doubles, les caractéristiques en traits pleins et les trajectoires des voitures en traits pointillés, en choisissant la valeur particulière $R_1 = 1/4$,
- 11) Tracer le profil de $R(X, T)$ pour tout X à différents instants $T \geq 0$. Commenter.

Onde de détente

On suppose que le domaine $X \leq 0$, où $R = 1$, est isolé du domaine $X > 0$, où $R = 0$, à cause de l'existence du feu qui reste au rouge pour $0 \leq T \leq T_r$ où $T_r > 0$ est un temps fixé.

- 12) Dessiner les droites caractéristiques dans la région du plan (X, T) telle que $0 \leq T \leq T_r$.
- 13) À partir de $T = T_r$, le feu passe au vert et le modèle de trafic routier régit l'ensemble du domaine spatial (droite infinie), sa condition initiale pour $T = T_r$ étant le profil discontinu $R = 1$ pour $X \leq 0$ et $R = 0$ pour $X \geq 0$. Dessiner alors toutes les caractéristiques dans le demi-plan $(X, T \geq T_r)$.
- 14) Montrer que l'on peut alors écrire $C(R) = X/(T - T_r)$ dans une région de ce demi-plan que l'on précisera. En déduire l'expression de $R(X, T)$ dans tout le demi-plan. Tracer son profil spatial pour différentes valeur de $T \geq T_r$.

Onde de choc suivi d'une onde de détente

On suppose que $R = R_1$ pour $T \leq 0$ où R_1 est une constante indépendante de l'espace et du temps. Pour $T \geq 0$, un feu rouge situé en $X = 0$ impose la condition aux limite $V[R(0^-, T)] = 0$ pour $X = 0^-$ et $R(0^+, T) = 0$ pour $X = 0^+$, séparant ainsi le domaine spatial en deux demi-droites disjointes. À $T = T_r$, le feu passe au vert, connectant ainsi ces deux demi-droites.

- 15) Calculer le temps $T_a > T_r$ pour lequel le choc situé à gauche du feu n'est plus animé d'une vitesse constante. À quel position X_a se trouve alors le choc ?
- 16) Montrer que l'équation $X = S(T) = (1 - 2R_1)(T - T_r) - 2\sqrt{R_1(1 - R_1)}\sqrt{T_r(T - T_r)}$ décrit bien la trajectoire pour $T \geq T_a$ et $X \leq 0$. En déduire le temps $T_b > T_a$ pour lequel la vitesse de ce choc devient nulle. Donner la valeur numérique de T_b/T_r pour $R_1 = 1/4$.
- 17) On cherche à déterminer le temps $T_c > T_b$ pour lequel ce choc passe par le point $X = 0$. Montrer que sa vitesse est alors strictement positive. Donner la valeur numérique de T_c/T_r pour $R_1 = 1/4$. Effectuer un tracé schématique de la trajectoire du choc et des caractéristiques dans le demi-plan $(X \leq 0, T)$.
- 18) On considère le rectangle $IJCO$ défini par les coordonnées (X_I, T_I) , (X_J, T_J) , (X_C, T_C) et (X_O, T_O) telle que $T_I = T_O = 0$, $T_J = T_C = T_c$, $X_O = X_C = 0$ et $X_I = X_J < S(T_b)$ où $S(T) \leq 0$ pour $0 \leq T \leq T_c$ est la position du choc situé à gauche du feu. En utilisant les équations du modèle, montrer que

$$\int_{X_I}^0 R(X, T_c) dX - \int_{X_I}^0 R(x, 0) dX = \int_0^{T_c} [Q(X_I, T) - Q(0, T)] dT. \quad (1)$$

- 19) En déduire que $Q_1 T_c = Q^*(T_c - T_r)$ avec $Q_1 = R_1 - R_1^2$ et $Q^* = 1/4$.
- 20) Pour un temps T_r de feu rouge donné, le temps $T_v = T_c - T_r$ du feu vert est optimum pour le confort des piétons tout en perturbant pas le trafic en amont du feu. Montrer que ce temps dépend de la densité amont R_1 à travers la relation

$$\frac{T_v}{T_r} = F(R_1) = \frac{R_1(1 - R_1)}{(1/2 - R_1)^2}. \quad (2)$$

- 21) Tracer la fonction $F(R_1)$ en fonction de $R_1 \in [0, 1/2]$. Quelle est sa valeur dans le cas particulier $R_1 = 1/4$. Commenter la variation de ce rapport de temps en fonction de l'intensité du trafic.