NB : Le livre du cours ainsi que des notes personnelles manuscriptes sur une page recto-verso sont autorisées. Ne pas oublier d'inscrire son nom sur chaque page. Durée 1h45. Chaque question est notée sur un point.

EXERCICE 0.1 Réflexion et transmission en milieu peu profond

On rappelle que les ondes de surface harmoniques se propageant vers la droite sont de la forme

$$\phi(x,y,t) = \overline{B}\,\mathrm{ch}\,[k(y+h)]\;\sin[k(x-c\,t)+\varphi]\;,\quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\,\eta = 0\;,\quad k\,c = \sqrt{g\,k\,\mathrm{th}\,(k\,h)}\;, \qquad (1)$$

où ϕ est le potentiel des vitesses, $\overline{B}$ et k des constantes réelles positives, h la profondeur, φ une phase arbitraire, η l'élévation de la surface libre et g la gravité. On se place dans le cas peu profond $k\,h \ll 1$.

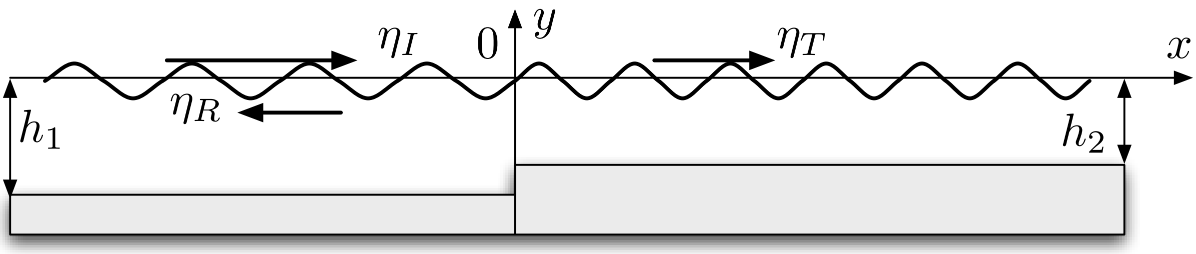

Figure 1: Ondes de surface incidente η_I, réfléchie η_R et transmise η_R en milieu peu profond.

1) À l'ordre dominant du petit paramètre $k\,h$, donner la valeur approchée de ϕ et décrire les trajectoires.
2) Exprimer la vitesse c à l'ordre dominant. Les ondes sont-elles dispersives à cet ordre ?
3) Justifier que l'élévation de la surface libre des ondes en milieu peu profond est de la forme $\eta(x,t) = F(x-c\,t) + G(x+c\,t)$. En déduire l'expression de la vitesse $\widetilde{u}(x,t)$ associée.
4) On considère une discontinuité de hauteur avec $h = h_1$ pour $x \leq 0$ et $h = h_2$ pour $x \geq 0$. (voir figure 1). Justifier les conditions aux limites $[\![\eta]\!] = 0$ et $[\![h\,\widetilde{u}]\!] = 0$ en $x = 0$.
5) On considère l'onde incidente $\eta_I = f_I(x - c_1\,t)$ et on note respectivement $\eta_R = f_R(x + c_1\,t)$ et $\eta_T = f_T(x - c_2\,t)$ les ondes indicidentes et réfléchies. Que valent c_1 et c_2 ?
6) Exprimer $\eta(x,t)$ sur tout le domaine à l'aide de la fonction $f_I(X)$.
7) Considèrer les cas $h_1 \ll h_2$ et $h_2 \ll h_1$. Commenter.

EXERCICE 0.2 Trafic routier cubique

On considère le modèle de trafic routier $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx = q(x_1,t) - q(x_2,t)$ avec $q = \rho\,v(\rho)$. On suppose ici que $v(\rho) = A - B\,\rho^2$ où A et B sont des constantes positives et on impose $0 \leq \rho \leq \sqrt{A/B}$.

8) Donner l'expression de la vitesse $c(\rho_0)$ à laquelle se propagent les petites perturbations $\widetilde{\rho}$ de la solution homogène $\rho = \rho_0$.
9) On suppose que $\rho(x,t)$ admet un discontinuité mobile en $x = s(t)$ et on note ρ_- et ρ_+ les valeurs de ρ respectivement à gauche et à droite de la discontinuité. Calculer $\frac{ds}{dt}(t)$.

10) On considère la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ avec $\rho_0(x) = \sqrt{A/B}$ pour $x \leq 0$ et $\rho_0(x) = 0$ pour $x \geq 0$. Calculer $\rho(x,t)$ pour tout x et tout t et tracer le carré de cette fonction pour t fixé.
11) On considère la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ avec $\rho_0(x) = \rho_L$ pour $x \leq 0$ et la condition aux limites $\rho(0,t) = \sqrt{A/B}$ pour $t \in [0, T_R]$, $\rho(0,t) = \sqrt{A/(3B)}$ pour $t \in [T_R, T_R + T_V]$ et $\rho(0,t) = \rho_L$ pour $t \geq T_R + T_V$ où T_R et T_V sont des constantes positives. On suppose que $\rho(x,t) = \rho_L$ pour $x \leq 0$ et $t \geq T_R + T_V$. Calculer le rapport $\chi = T_R/T_V$ pour le cas où $\rho_L = \sqrt{A/(4B)}$.

EXERCICE 0.3 Onde localisée

On considère l'équations des ondes 1D $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ dans un milieu infini.
On note $\phi_0(x) = u(x,0)$ et $\zeta_0(x) = \frac{\partial \phi_0}{\partial t}(x,0)$ les conditions initiales.

12) Dans le cas des oscillations transversales d'une corde tendue, $y = \phi$ est le déplacement. Donner l'expression de c en fonction de la tension T et de la masse linéique ρ de la corde.
13) Dans le cas des vibrations longitudinales isentropiques d'un gaz parfait dans un tube, ϕ est le potentiel des vitesses. Donner l'expression de c en fonction des paramètres de pression p_0, de la masse volumique ρ_0, de la constante $\gamma = C_p/C_v$ du gaz.
14) On suppose $\phi_0(x) = \sin x\, e^{-x^2}$ et $\zeta_0(x) = c\,(\cos x - 2\,x\,\sin x)\,e^{-x^2}$. Calculer et tracer la solution $\phi(x,t)$ pour plusieurs valeurs de t.

EXERCICE 0.4 Ondes élastiques stationnaires

On note $\underline{x} = x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 + x_3\,\underline{e}_3$ un point de l'espace et on s'intéresse à des champs de déplacement de la forme $\underline{u}(x_1,t) = u_1\,\underline{e}_1 + u_2\,\underline{e}_2$ pour un solide élastique occupant l'espace $0 \leq x_1 \leq l$ où l compris entre deux plaques planes d'équations respectives $x_1 = 0$ et $x_1 = l$.

15) Rappeler brièvement la détermination des vitesses $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ à partir des équation de Lamé $\rho\,\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{u}) + \mu\,\Delta\underline{u}$.
16) On suppose que $u_2 = 0$ et $u_1 = \sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t)$ avec $k = \pi/l$. Calculer ω.
17) On suppose que $u_1 = 0$ et $u_2 = \cos(k\,x)\,\sin(\omega\,t)$ avec $k = \pi/l$. Calculer ω.
18) Calculer les contraintes $\underline{T}$ exercées par les plaques sur le solide dans pour chacun des questions précédentes