NB : seules les notes personnelles manuscriptes sont autorisées. Ne pas oublier d'inscrire son nom sur chaque page. Durée 1h45. Chaque question est notée sur un point.

EXERCICE 0.1 Ondes sur une corde tendue infinie

(Exercice 2 de l'examen 2012)

On considère le déplacement $y(x,t)$ d'une corde tendue infinie de tension T (N) et de masse linéique ρ (kg/m).

1) Donner l'expression de la constante c de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ vérifiée par le déplacement.
2) On suppose que $y(x,0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$. En considérant la solution générale $y(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$, montrer que l'on peut écrire $f(X) + G(X) = y_0(X)$ et $-c\,f(X) + c\,g(X) = \varphi(X)$, où $\varphi(X)$ est un fonction que l'on exprimera en imposant $\varphi(0) = 0$.
3) Calculer $f(X)$ et $g(X)$ dans le cas où $v_0(x) = -c\,y_0'(x)$.
4) On suppose que $y_0(x) = a/(1+x^2)$ et $v_0(x) = 2\,a\,c\,x/(1+x^2)^2$. En déduire $y(x,t)$.
5) Tracer $y(x,t)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ pour plusieurs valeurs de $t \le 0$.
6) Même question dans le cas $y_0(x) = a/(1+x^2)$ et $v_0(x) = 0$.

EXERCICE 0.2 Ondes de surface en présence d'un courant

(Exercice 2 de l'examen 2011)

On considère une couche fluide de masse volumique ρ constante dont l'état stationnaire occupe le domaine $y \le 0$ en étant animé d'une vitesse constante $U_0\,\underline{e}_x$. On s'intéresse aux petites oscillations 2D de cette couche fluide en notant $y = \eta(x,t)$ l'élévation de la surface libre, $p(x,y,t)$ le champ de pression et $\underline{U}(x,y,t)$ le champ de vitesse. On suppose que ces mouvements peuvent être décrits pour un modéle incompressible, inviscide et irrotationnel. On suppose que le fluide est surmonté d'un gaz de pression p_{atm} supposée constante.

7) On suppose que le champ de vitesse est de la forme $\underline{U} = \underline{\text{grad}}\,(U_0\,x + \phi)$. Justifier ce choix.
8) D'où provient alors la relation $\Delta\phi = 0$? Montrer que l'on peut écrire $p = p_{atm} - \rho\,g\,y - \rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$.
9) D'où proviennent les conditions aux limites $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ pour $y = -\infty$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ pour $y = 0$? Indiquer les approximations effectuées.
10) Écrire la condition aux limites dynamique de surface libre dans le cadre de l'approximation des petites oscillations.
11) En déduire que $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi + g\,\frac{\partial}{\partial y}\phi = 0$ pour $y = 0$.
12) Exprimer les relations de dispersion $\omega = \Omega_+(k_x)$ et $\omega = \Omega_-(k_x)$ pour des perturbations de la forme $\phi = \Phi(y)\,\cos(k_x\,x - \omega\,t)$. On pourra noter $k = |k_x|$. Tracer le profil $\Phi(y)$.

EXERCICE 0.3 Guide d'ondes sonores

(Exercice 2 de l'examen 2010)

On considère les équations d'Euler linéarisées

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\,\text{div}\,\underline{\widetilde{u}} = 0\ , \quad \frac{\partial \underline{\widetilde{u}}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\,\underline{\text{grad}}\,\widetilde{p}\ , \quad \underline{\widetilde{u}} = \underline{\text{grad}}\,\phi\ , \quad \widetilde{p} = c^2\,\widetilde{\rho}\ . \tag{1}$$

13) Interpréter brièvement les équations de ce modèle. Comment est défini c lorsque les tranformations induites par le mouvement sont adiabatiques ?
14) On considère le cas 2D pour lequel les champs ne dépendent pas de la coordonnée y. Expliciter les équations en notant $\widetilde{u}$ et $\widetilde{w}$ les composantes non nulles de la vitesse.
15) On considère le domaine $0 \leq x \leq d$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ en $x = 0$ et $x = d$. Interpréter ces conditions aux limites et faire un schéma pour illustrer le problème.
16) On cherche des solutions de la forme $\phi(x, z, t) = 2\,A\,\cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{d}\right)\,e^{i\,(\omega\,t - k_n\,z)}$ où n est un entier. Exprimer $k_n > 0$ en fonction de n, c, d et ω pour les valeurs de n où il est défini.

$\boxed{\textbf{EXERCICE 0.4}}$ Ondes élastiques

(Exercice 5 de l'examen 2008, questions 1 à 4)

On considère l'équation de Lamé $\rho \dfrac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\,\underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{u}) + \mu\,\Delta \underline{u}$ où $\underline{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ est le champ de déplacement d'un milieu élastique infini. On note $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

17) On considère le champ $\underline{u} = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2}, 0\right)$ avec $\phi = \phi_m\,\cos\left(k_1\,x_1 + k_2\,x_2 - \omega\,t\right)$ où ϕ_m, k_1, k_2 et ω sont des constantes réelles strictement positives. Quelle relation doivent vérifier ces constantes pour que $\underline{u}$ soit solution des équations de Lamé ?
18) Dessiner les iso-ϕ dans le plan Ox_1x_2 pour un instant donné. Indiquer la direction de la vitesse de phase sur le graphique et exprimer son module en fonction des paramètres du problème. Dessiner le champ de déplacement. Quelle est la nature de l'onde élastique observée ?
19) On considère le champ $\underline{u} = \left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}, 0\right)$ avec $\psi = \psi_m\,\cos\left(k_1\,x_1 + k_2\,x_2 - \omega\,t\right)$ où ψ_m, k_1, k_2 et ω sont des constantes réelles strictement positives. Quelle relation doivent vérifier ces constantes pour que $\underline{u}$ soit solution des équations ?
20) Dessiner les iso-ϕ, la direction de la vitesse de phase et le champ de déplacement. Quelle est la nature de l'onde élastique observée ?