*NB : seules les notes personnelles manuscriptes sont autorisées. Ne pas oublier d'inscrire son nom sur chaque page. Durée 2h. Chaque question est notée sur un point.*

## EXERCICE 0.1 Cordes tendues

On considère une corde de masse linéique $\rho$, tendue avec la tension $T$ et dont le déplacement tranversal est décrit par l'équation des ondes 1D $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

1) Préciser les dimensions de $\rho$ et de $T$. Exprimer $c$ en fonction de ces deux paramètres.

### Corde de longueur infinie

On suppose que la corde est suffisamment longue pour pouvoir être considérée comme infinie. On considère une condition initiale de la forme $y(x,0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$ et on s'intéresse à la solution $y(x,t)$ qui en découle pour $t \geq 0$. On définit la fonction $F$ par les relations $F(X) = 1 + \cos(k\,X)$ pour $|X| \leq l$ et $F(X) = 0$ sinon, où $l$ est une longueur et $k = \pi/l$.

2) On suppose que $y_0(x) = 2\,a\,F(x)$ et $v_0(x) = 0$ où $a$ est une constante. Exprimer la solution $y(x,t)$ à l'aide de la fonction $F(X)$.
3) Tracer les profils spaciaux de $y(x,t)$ et $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ pour $t > \tau$ avec $\tau = l/c$.
4) Mêmes questions en supposant que $y_0(x) = a\,F(x)$ et $v_0(x) = -a\,c\,F'(x)$.
5) Mêmes questions avec $y_0(x) = a\,[F(x) - F(x - 2\,L)]$ et $v_0(x) = a\,c\,[-F'(x) - F'(x - 2\,L)]$, où $L > l$.
6) Que valent dans ce cas le signal $y(L,t)$ pour $t \geq 0$ ainsi que le profil $y(x,T)$ pour $T = L/c$ ?

### Corde semi-finie

On suppose maintenant que la corde est fixée au point $x = L$ pour lequel $y(L,t) = 0$. On s'intéresse aux solutions de la forme $y(x,t) = f_I(x - c\,t) + f_R(x + c\,t)$.

7) On suppose $f_I(X)$ connu. Exprimer $f_R(X)$ en fonction de $f_I(X)$. On pourra considérer le changement de variable $X = L + c\,t$.
8) Exprimer alors $y(x,t)$ à l'aide de la fonction $f_I$.
9) On considère la condition initiale $y_0(x) = a\,F(x)$ et $v_0(x) = -a\,c\,F'(x)$ avec $l < L$. Écrire la solution $y(x,t)$ qui en découle. Comparer avec la solution de la question 5.
10) Tracer $y(x,t)$ à différents instants dans les intervalles $[0, T - \tau]$, $[T - \tau, T]$, $[T, T + \tau]$ et $[T + \tau, +\infty]$ pour $T = L/c$ et $\tau = l/c$ ?

## EXERCICE 0.2 Ondes de surface en présence d'un courant

On considère une couche fluide de masse volumique $\rho$ constante dont l'état stationnaire occupe le domaine $y \leq 0$ en étant animé d'une vitesse constante $U_0\,\underline{e}_x$. On s'intéresse aux petites oscillations 2D de cette couche fluide en notant $y = \eta(x,t)$ l'élévation de la surface libre, $p(x,y,t)$ le champ de pression et $\underline{U}(x,y,t)$ le champ de vitesse. On suppose que ces mouvements peuvent être décrits pour un modéle incompressible, inviscide et irrotationnel. On suppose que le fluide est surmonté d'un gaz de pression $p_{atm}$ supposée constante.

11) On suppose que le champ de vitesse est de la forme $\underline{U} = \underline{\text{grad}}\,(U_0\,x + \phi)$. Justifier ce choix.

12) D'où provient alors la relation $\Delta\phi = 0$ ? Montrer que l'on peut écrire $p = p_{atm} - \rho\, g\, y - \rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$.
13) D'où proviennent les conditions aux limites $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$ pour $y = -\infty$ et $\frac{\partial\eta}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$ pour $y = 0$ ? Indiquer les approximations effectuées.
14) Écrire la condition aux limites dynamique de surface libre dans le cadre de l'approximation des petites oscillations.
15) En déduire que $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi - g\,\frac{\partial}{\partial y}\phi = 0$ pour $y = 0$.
16) Exprimer les relations de dispersion $\omega = \Omega_+(k_x)$ et $\omega = \Omega_-(k_x)$ pour des perturbations de la forme $\phi = \Phi(y)\,\cos(k_x\, x - \omega\, t)$. On pourra noter $k = |k_x|$. Tracer le profil $\Phi(ycv)$.

## EXERCICE 0.3 Réflexion d'une onde élastique sur une surface libre

On considère un solide élastique contenu dans le demi-espace $x_2 \leq 0$ et on note $\underline{x} = x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2$. On s'intéresse à des champs de déplacement 2D de la forme $\underline{u}(x_1, x_2, t) = u_1\,\underline{e}_1 + u_2\,\underline{e}_2$. On note ici $\underline{e}(\theta) = \sin\theta\,\underline{e}_1 + \cos\theta\,\underline{e}_2$.

17) On suppose que la contrainte normale à la surface est nulle. À partir de la loi de Hooke, de coefficient de Lamé $\lambda$ et $\mu$. On note $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ et $\beta = \frac{c_1}{c_2}$. Montrer que $u_{1,2} + \alpha_1\,u_{2,1} = 0$ et $u_{1,1} + \alpha_2\,u_{2,2} = 0$ en $y = 0$ où $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de $\beta$.
18) On suppose qu'une onde plane longitudinale $\underline{u}_I$ d'amplitude réelle $A_I$ et de vecteur d'onde $\underline{k}_I = k_I\,\underline{e}(\theta_I)$ avec $\theta_I \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ se réfléchit en une onde plane longitudinale $\underline{u}_D$ d'amplitude réelle $A_D$ et de vecteur d'onde $\underline{k}_D = k_D\,\underline{e}(\pi - \theta_D)$ avec $\theta_D \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ainsi qu'une onde plane transversale $\underline{u}_R$ d'amplitude réelle $A_R$ et de vecteur d'onde $\underline{k}_R = k_R\,\underline{e}(\pi - \theta_R)$ avec $\theta_R \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, le déplacement transversal étant orienté dans la direction $\underline{e}(\frac{\pi}{2} - \theta_R)$. Écrire une solution complexe $\underline{u}(x_1, x_2, t)$ des équations de Lamé sous la forme d'une somme $\underline{u} = \underline{u}_I + \underline{u}_D + \underline{u}_R$ en explicitant les expressions de ces trois ondes en fonction des $\underline{e}(\theta)$ de $\underline{x}$ ou de leur produits scalaires $\underline{e}(\theta) \cdot \underline{x}$.
19) Expliciter les conditions aux limites en $y = 0$ et montrer que $\theta_D = \theta_I$ et $\gamma\,\sin\theta_R = \sin\theta_I$ où $\gamma$ est une constante que l'on exprimera en fonction de $\beta$. On pourra noter $\phi_I = k_I(x_1 \sin\theta_I + x_2\cos\theta_I - c_1 t)$, $\phi_D = k_D(x_1\sin\theta_D - x_2\cos\theta_D - c_1 t)$ et $\phi_R = k_R(x_1\sin\theta_R - x_2\cos\theta_R - c_2 t)$. On pourra également noter $\varphi_I = k_I(x_1\sin\theta_I - c_1 t)$, $\varphi_D = k_D(x_1\sin\theta_D - c_1 t)$ et $\varphi_R = k_R(x_1\sin\theta_R - c_2 t)$.
20) Montrer que $X_D = A_D/A_I$ et $X_R = A_R/A_I$ sont solutions d'un système linéaire inhomogène que l'on explicitera à l'aide des coefficients $a_1 = \beta\,\cos(2\,\theta_R)/\sin(2\,\theta_I)$ et $a_2 = \beta\,\sin(2\,\theta_R)/\left[\frac{\beta^2+1}{\beta^2-1} + \cos(2\,\theta_I)\right]$.

*Corrigé page 3*

## Corrigé 1 Cordes tendues

**1)**On a $[\rho]$ =kg/m et $[T]$ =N= kg.m/s$^2$. La vitesse $c = \sqrt{T/\rho}$ vérifie bien $[c]$ =m/s.

### Corde de longueur infinie

**2)**La solution s'écrit $y(x,t) = a\,[F(x - c\,t) + F(x + c\,t)]$. On a bien $y(x,0) = F(x)$. Comme $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = a\,c\,[-F'(x - c\,t) + F'(x + c\,t)]$, on a bien $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. **3)**Le tracé de $y(x,t)$ pour $t > l/c$ est composé de deux "cloches" animées des vitesses respectives $-c$ et $c$ (voir Figure 1a). Pour $t > l/c$, les deux cloches sont disjointes. On a $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = a\,c\,[-F'(x - c\,t) + F'(x + c\,t)]$ avec $F'(X) = -k\,\sin(kX)$ pour $|X| \leq l$ et $F'(X) = 0$ sinon. Le tracé de $v(x,t)$ est composé de deux sinusoïdes qui suivent les "cloches" $y(x,t)$. Ces sinusoïdes sont positives à l'avant du sens de propagations des "cloches". **4)**On a ici $y(x,t) = a\,F(x-c\,t)$ et $v(x,t) = -a\,c\,F'(x-c\,t)$. Cette solution décrit la "cloche" qui se propage vers la droite (partie droite de la Figure 1a). **5)**On a ici $y(x,t) = a\,[F(x - c\,t) - F(x - 2\,L + c\,t)]$ et $v(x,t) = a\,c\,[-F'(x - c\,t) - F'(x - 2\,L + c\,t)]$. Cette solution décrit une "cloche" et une "cloche inversée" animées des vitesses respectives $c$ et $-c$, partant des positions respectives $x = 0$ et $x = 2\,L$ et qui se rencontrent (centres) en $t = T = L/c$ (voir Figure 1b). **6)**On a donc $y(x,T) = a\,[F(x - L) - F(x - 2\,L + L)] = 0$ pour tout $x$ et $y(L,t) = a\,[F(L - c\,t) - F(-L + c\,t)] = 0$ pour tout $t$ en utilisant la symétrie $F(-X) = F(X)$.

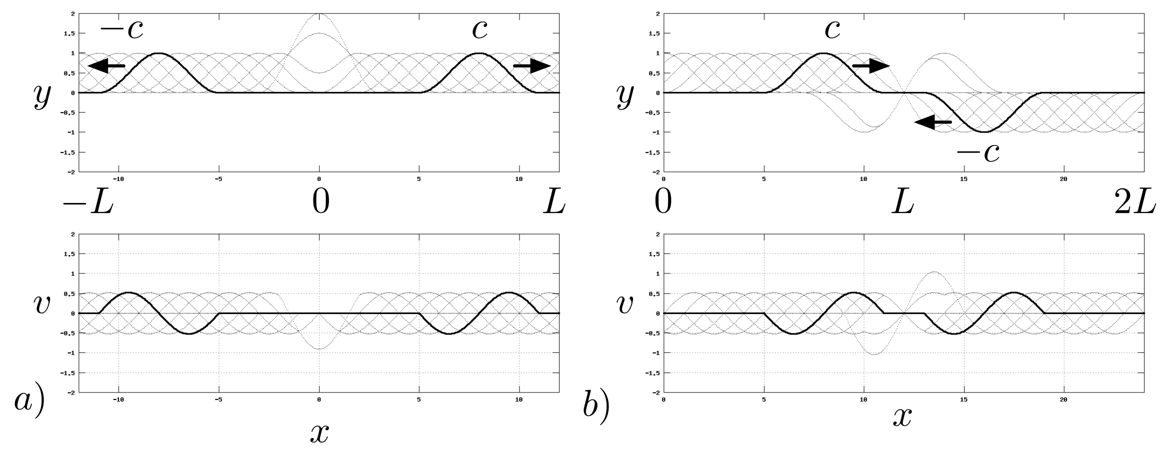


Figure 1: Tracés de $y$ et $v$ pour a) questions 3 et 4, b) questions 5 et 10.

### Corde semi-finie

**7)**La condition aux limites $y(L,t) = 0$ s'écrit $f_I(L - c\,t) = -f_R(L + c\,t)$ pour tout $t$. On posant $X = L + c\,t$, donc $L - c\,t = 2\,L - X$, on obtient $f_R(X) = -f_I(2\,L - X)$. **8)**On en déduit que $y(x,t) = f_I(x - c\,t) - f_I(2\,L - x - c\,t)$. **9)**En utilisant la symétrie $F(-X) = F(X)$, on peut écrire $y(x,t) = a\,[F(x - c\,t) - F(x - 2\,L + c\,t)]$. Cette solution est identique à celle de la question 5 en milieu infini. **10)**La "cloche" $F(X)$ qui se propage vers la droite à la vitesse $c$ rencontre en $x = L$ la "cloche inversée" $-F(X)$ qui se propage vers la gauche à la vitesse $-c$ de sorte que le bord $x = L$ soit un noeud de l'onde stationnaire ainsi générée avec $y(L,t) = 0$ pour tout $t$ (voir Figure 1b).

## Corrigé 2 Ondes de surface en présence d'un courant

**11)**Comme le champ de vitesse est irrotationnel, il s'écrit comme le gradient d'un potentiel que l'on peut exprimer sous la forme $U_0\,x+\phi$ de sorte que $\underline{U}=U_0\,\underline{e}_x+\underline{\mathrm{grad}}\;\phi$ et que $\phi$ soit petit pour les petites oscillations autour de l'état de base considéré. **12)**La loi de conversation de la masse s'écrit div $\underline{U}=\Delta\phi=0$. La loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit $\underline{\mathrm{grad}}\left(\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t}+U_0\,\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2}\underline{U}^2+p+\rho\,g\,y\right)=0$ ce qui entraine $p=p_{atm}-\rho\,g\,y-\rho(\frac{\partial\phi}{\partial t}+U_0\,\frac{\partial\phi}{\partial x})$ en négligeant le terme d'ordre $\underline{U}^2$, qui est d'ordre 2, et en ajoutant à $\phi$ une fonction du temps $C(t)$ adéquate de façon à choisir $p_{atm}$ comme constante d'intégration du gradient. **13)**La condition aux limites $\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$ pour $y=-\infty$ exprime qu'il n'y a pas de vitesse verticale sur un fond très profond. La condition aux limites cinématique $\frac{\partial\eta}{\partial t}+U_0\,\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial y}$ pour $y=0$ s'obtient en négligeant le terme non linéaire $\underline{U}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\;\eta$ et en remplaçant la surface mobile $y=\eta(x,t)$ par le plan fixe $y=0$ en raison de l'approximation des petites oscillations. **14)**La condition dynamique $p=p_{atm}$ en $y=0$ s'écrit $\frac{\partial\phi}{\partial t}+U_0\,\frac{\partial\phi}{\partial x}=g\,\eta$. **15)**Comme $(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\,\frac{\partial}{\partial x})\phi=g\,\eta$ et $(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\,\frac{\partial}{\partial x})\eta=\frac{\partial\phi}{\partial y}$ en $y=0$, on peut écrire $(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\,\frac{\partial}{\partial x})^2\,\phi=g\,\frac{\partial\phi}{\partial y}$ sur cette même surface. **16)**La relation $\Delta\phi=0$ entraine $\Phi''(y)+k^2\,\Phi(y)=0$ avec $k=|k|$. En tenant compte de la condition aux limites en $y=-\infty$, on en déduit $\Phi(y)=\Phi_m\,\exp(k\,y)$ où $\Phi_m$ est une constante. En reportant dans la condition aux limites de surface, on obtient $(\omega-U_0\,k_x)^2=g\,k$ après avoir éliminé la solution triviale $\Phi_m=0$. Les relations de dispersion sont donc $\omega=\Omega_+(k_x)=U_0\,k_x+\sqrt{g\,k}$ et $\omega=\Omega_-(k_x)=U_0\,k_x-\sqrt{g\,k}$. Le profil $\phi(y)$ décroit exponentiellement vers le fond.

## Corrigé 3 Réflexion d'une onde élastique sur une surface libre

**17)**La loi de Hooke $\underline{\underline{\sigma}}=\lambda\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{I}}+2\,\mu\,\underline{\underline{e}}$ et la condition aux limites de surface $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{e}_2=\underline{0}$ entrainent $\lambda\,(u_{1,1}+u_{2,2})\,\underline{e}_2+\mu\,(u_{1,2}+u_{2,1})\,\underline{e}_1+2\,\mu\,u_{2,2}\,\underline{e}_2=\underline{0}$ et donc $u_{1,2}+u_{2,1}=0$ et $\lambda\,u_{1,1}+(\lambda+2\,\mu)\,u_{2,2}=0$. On a donc $\alpha_1=1$ et $\alpha_2=\beta^2$. **18)**On a $\underline{u}_I=A_I\,\underline{e}(\theta_I)\,e^{i\,k_I[\underline{e}(\theta_I)\cdot\underline{x}-c_1\,t]}$, $\underline{u}_D=A_D\,\underline{e}(\pi-\theta_D)\,e^{i\,k_D[\underline{e}(\pi-\theta_D)\cdot\underline{x}-c_1\,t]}$ et $\underline{u}_R=A_R\,\underline{e}(\frac{\pi}{2}-\theta_R)\,e^{i\,k_R[\underline{e}(\pi-\theta_R)\cdot\underline{x}-c_2\,t]}$. **19)**On a $u_1=A_I\sin\theta_I e^{i\,\phi_I}+A_D\sin\theta_D e^{i\,\phi_D}+A_R\cos\theta_R e^{i\,\phi_R}$ et $u_2=A_I\cos\theta_I e^{i\,\phi_I}-A_D\cos\theta_D e^{i\,\phi_D}+A_R\sin\theta_R e^{i\,\phi_R}$ avec $\phi_I=k_I(x_1\sin\theta_I+x_2\cos\theta_I-c_1t)$, $\phi_D=k_D(x_1\sin\theta_D-x_2\cos\theta_D-c_1t)$ et $\phi_R=k_R(x_1\sin\theta_R-x_2\cos\theta_R-c_2t)$. On a donc $u_{1,2}+u_{2,1}=2A_Iik_I\sin\theta_I\cos\theta_I e^{i\,\varphi_I}-2A_Dik_D\sin\theta_D\cos\theta_D e^{i\,\varphi_D}+A_Rik_R(-\cos^2\theta_R+\sin^2\theta_R)e^{i\,\varphi_R}=0$ et $u_{1,1}+\beta^2u_{2,2}=A_Iik_I(\sin^2\theta_I+\beta^2\cos^2\theta_I)e^{i\,\varphi_I}+A_Dik_D(\sin^2\theta_D+\beta^2\cos^2\theta_D)e^{i\,\varphi_D}+A_Rik_R(\cos\theta_R\sin\theta_R-\beta^2\sin\theta_R\cos\theta_R)e^{i\,\varphi_R}=0$ avec $\varphi_I=k_I(x_1\sin\theta_I-c_1t)$, $\varphi_D=k_D(x_1\sin\theta_D-c_1t)$ et $\varphi_R=k_R(x_1\sin\theta_R-c_2t)$. Comme cette relation est vraie pour tout $x$ et pour tout $t$, on doit donc avoir $\varphi_I=\varphi_R=\varphi_D$. On a donc $k_Ic_1=k_Dc_1=k_Rc_2$ et $k_I\sin\theta_I=k_D\sin\theta_D=k_R\sin\theta_R$, ce qui entraine $\sin\theta_I=\sin\theta_D=\frac{c_1}{c_2}\sin\theta_R$. On a donc $\theta_I=\theta_D$ et $\gamma=\beta$. **20)**On a $\sin(2\theta_I)X_D+\beta\cos(2\theta_R)X_R=\sin(2\theta_I)$ et $[(\beta^2+1)+(\beta^2-1)\cos(2\theta_I)]X_D+\beta(\beta^2-1)\sin(2\theta_I)X_R=[(\beta^2+1)+(\beta^2-1)\cos(2\theta_R)]$. On a donc $X_D+a_1\,X_R=1$ et $-X_D+a_2\,X_R=1$