EXERCICE 0.1 Gammes harmonique et tempérée

On s'intéresse aux vibrations de cordes de piano en acier de diamètre $D = 3$ mm et de tension T. La masse volumique de l'acier est $R = 7\ 000$ kg m^{-3}. Les extrémités de ces cordes sont fixes. La première de ces cordes est de longueur $L_0 = 2$ m et la fréquence de son mode fondamental de vibration est un Do-0 dont la valeur est $f_0 = 32.7$ Hz.

1) Exprimer la vibration $y(x,t)$ correspondant à ce mode fondamental en notant a une amplitude arbitraire et φ une phase arbitraire. Représenter schématiquement cette solution.
2) À quelle vitesse se propagent les ondes sur cette corde ? En déduire la valeur de T.

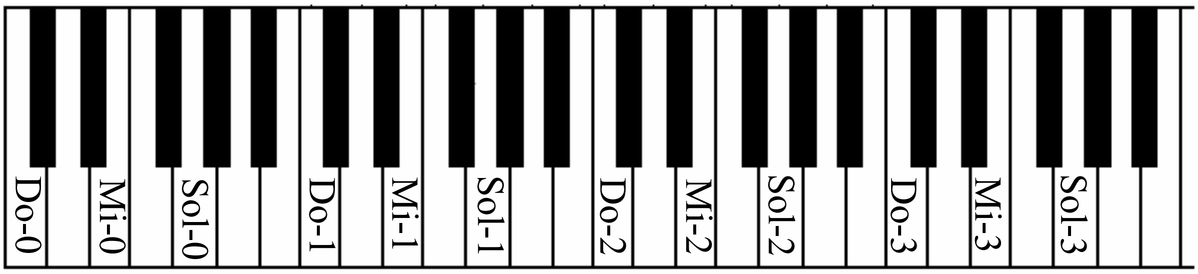

Figure 1: Clavier de piano et nomenclature des notes.

On attribue des noms de notes à certaines fréquences, le Do-0 étant affecté à la fréquence $f_0 = 32.7$ Hz. On appelle octave l'intervalle entre une fréquence f et la fréquence double $2\,f$ et on attribue le même nom à deux notes dont l'une est à l'octave par rapport à l'autre. C'est ainsi que le Do-1 correspond à la fréquence $2\,f_0 = 65.4$ Hz et le Do-n à la fréquence $2^n\,f_0$ pour $n \geq 0$. On appellera "corde de Do-n" une corde dont le fondamental vibre à la fréquence Do-n.

3) Calculer la longueur L_1 de la corde de Do-1, en supposant que sa tension T est la même que celle de la question précédente.
4) On considère deux cordes de Do-0 dont l'une est légérement désacordée, à cause de sa tension qui n'est pas tout à fait égale à la tension requise T. On note δf l'écart avec la fréquence requise. On suppose que les deux modes en quasi-résonnance génèrent des ondes sonores de puissance acoustique égale. Écrire la forme du signal pression $\widetilde{p}(t)$ qu'entend l'accordeur en notant $2\,A$ l'amplitude maximale du signal et φ une phase arbitraire. En déduire la période du battement qu'il entend. Proposer une méthode permettant de réaccorder cette corde.
5) Expliquer brièvement pourquoi, en frappant la corde de Do-1 d'un piano dont l'armature est en acier, la corde de Do-0, si elle n'est pas bloquée, émet aussi la fréquence de Do-1. Faire un schéma représentant les modes de vibrations des cordes intervenant dans ce couplage mécanique.
6) Dans la gamme harmonique, on nomme Sol-1 la note de fréquence $3\,f_0$. Calculer la fréquence de la note de Sol-0 ainsi que la longueur de la corde de Sol-0 en supposant que sa tension est encore T. Représenter schématiquement ces modes.
7) Expliquer brièvement pourquoi, en frappant la corde de Do-0 et en laissant libre la corde de Sol-0, cette dernière ément la fréquence correspondant à note de Sol-1. Faire un schéma.
8) On nomme Mi-2 la note de fréquence $5\,f_0$. Calculer la fréquence de la note de Mi-0 ainsi que la longueur de la note de Mi-0 en supposant que sa tension est encore T.
9) La gamme tempérée attribue aux fréquences $f_m = 440\ 2^{m/12}$ Hz les notes que l'on nome { Do-3, Ré-3, Mi-3, Fa-3, Sol-3, La-3, Si-3, Do-4 } pour $m \in \{-9, -7, -5, -4, -2, 0, 2, 3\}$ respectivement, les autres notes s'en déduisant par passage à l'octave. Calculer la différence de fréquence entre le Sol-3 de la gamme tempérée et le Sol-3 de la gamme harmonique.

EXERCICE 0.2 Guide d'ondes sonores

On considère les équations d'Euler linéarisées

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \,\mathrm{div}\, \underline{\widetilde{u}} = 0 \ , \quad \frac{\partial \underline{\widetilde{u}}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \underline{\mathrm{grad}}\, \widetilde{p} \ , \quad \underline{\widetilde{u}} = \underline{\mathrm{grad}}\, \phi \ , \quad \widetilde{p} = c^2\, \widetilde{\rho} \ . \tag{1}$$

10) Interpréter brièvement les équations de ce modèle. Comment est défini c lorsque les tranformations induites par le mouvement sont adiabatiques ?
11) On considère le cas 2D pour lequel les champs ne dépendent pas de la coordonnée y. Expliciter les équations en notant $\widetilde{u}$ et $\widetilde{w}$ les composantes non nulles de la vitesse.
12) On considère le domaine $0 \le x \le d$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ en $x = 0$ et $x = d$. Interpréter ces conditions aux limites et faire un schéma pour illustrer le problème.
13) On cherche des solutions de la forme $\phi(x, z, t) = 2\, A\, \cos\left(\frac{n\,\pi\, x}{d}\right)\, e^{i\,(\omega\, t - k_n\, z)}$ où n est un entier. Exprimer $k_n > 0$ en fonction de n, c, d et ω pour les valeurs de n où il est défini.

EXERCICE 0.3 Réflexion et transmission en milieu peu profond

On rappelle que les ondes de surface harmoniques se propageant vers la droite sont de la forme

$$\phi(x, y, t) = \overline{B}\ \mathrm{ch}\ [k(y + h)]\ \sin[k(x - c\,t) + \varphi] \ , \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\,\eta = 0 \ , \quad k\,c = \sqrt{g\,k\,\mathrm{th}\,(k\,h)} \ , \tag{2}$$

où ϕ est le potentiel des vitesses, $\overline{B}$ et k des constantes réelles positives, h la profondeur, φ une phase arbitraire, η l'élévation de la surface libre et g la gravité. On se place dans le cas peu profond $k\,h \ll 1$.

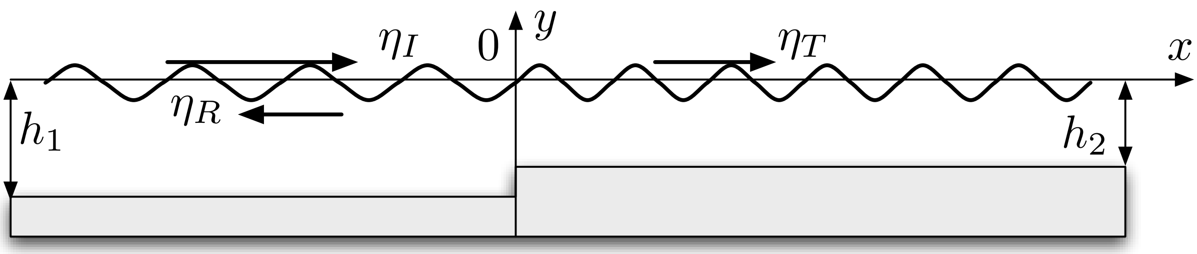

Figure 2: Ondes de surface incidente η_I, réfléchie η_R et transmise η_R en milieu peu profond.

14) À l'ordre dominant en du petit paramètre $k\,h$ donner la valeur approchée de ϕ et décrire les trajectoires.
15) Exprimer la vitesse c à l'ordre dominant. Les ondes sont-elles dispersives à cet ordre ?
16) Justifier que l'élévation de la surface libre des ondes en milieu peu profond est de la forme $\eta(x, t) = F(x - c\,t) + G(x + c\,t)$. En déduire l'expression de la vitesse $\widetilde{u}(x, t)$ associée.
17) On considère une discontinuité de hauteur avec $h = h_1$ pour $x \le 0$ et $h = h_2$ pour $x \ge 0$. (voir figure 2). Justifier les conditions aux limites $[\![\eta]\!] = 0$ et $[\![h\,\widetilde{u}]\!] = 0$ en $x = 0$.
18) On considère l'onde incidente $\eta_I = f_I(x - c_1\,t)$ et on note respectivement $\eta_R = f_R(x + c_1\,t)$ et $\eta_T = f_T(x - c_2\,t)$ les ondes indicidentes et réfléchies. Que valent c_1 et c_2 ?
19) Exprimer $\eta(x, t)$ sur tout le domaine à l'aide de la fonction $f_I(X)$.
20) Considèrer les cas $h_1 \ll h_2$ et $h_2 \ll h_1$. Commenter.

Corrigé page 3

Corrigé 1 Harmoniques et accords

1)On peut écrire $y = a \sin(\pi x/L_0) \ \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$. Il s'agit d'une onde stationnaire comprenant un ventre central et deux noeuds aux extrémités de la corde. **2)**Le mode fondamental est constitué de deux ondes d'amplitude $a/2$ et de longueur d'onde $2L_0$, se propageant en sens contraire. On a donc $k = 2\pi/(2L_0) = \pi/L_0$, $\omega = 2\pi f_0$ et $\omega = k\,c$. D'où $c = 2 f_0 L_0 = 130.8$ m/s. Comme $c = \sqrt{T/\rho}$ et $\rho = R\,\pi\,D^2/4 = 4.95\,10^{-2}$ kg/m, on a $T = \rho\,c^2 = 847$ N. **3)**Si T, donc c est inchangée, on a $c = 2\,f\,L$ pour un corde de longueur L et de fréquence f (mode fondamental). Par conséquent, la longueur de la note Do-1 de fréquence $2 f_0$ est égale à $L_0/2 = 1$ m. **4)**L'accordeur entend un signal acoustique de la forme $\widetilde{p}(t) = A \cos[2\pi\,(f_0 + \delta f)\,t + \varphi] + A\cos(2\pi f_0 t) = 2A \cos[2\pi\,(f_0 + \delta f/2)\,t + \varphi/2) \cos(\pi\,\delta f\,t + \varphi/2)$ qui représente des battements de fréquence $\delta f/2$ et donc de période $2/\delta f$. En réglant la tension de la corde de manière à ne plus entendre ces battements, l'accordeur peut faire disparaitre le défaut de fréquence δf pour accorder la corde. **5)**En frappant la corde de Do-0, on excite la fréquence f_0 du mode fondamental, mais aussi toutes ses harmoniques de fréquences respectives $2 f_0$, $3 f_0$, ..., $n f_0$, ... Par couplage acoustique et surtout mécanique, à travers l'armature du piano, le mode fondamental de la note Do-1, de fréquence $2 f_0$, est excité. **6)**Comme Sol-0 est à l'octave en-dessous de la note Sol-1 de fréquence $3 f_0$, sa fréquence est $3 f_0/2 = 49.05$ Hz. Comme $c = 2\,f\,L$ est inchangé (tension T inchangée), la longueur de la corde de Sol-0 est $2L_0/3 = 1.33$ m. **7)**En frappant le Do-0, on excite les fréquences f_0, $2 f_0$, $3 f_0$ ... Par couplage résonant, la note de Sol-0 dont le fondamental est $3 f_0/2$ et le premier harmonique $3 f_0$, oscille à la fréquence $3 f_0$ qui correspond à un Sol-1. **8)**Comme le Mi=2, de fréquence $5 f_0$, est à deux octaves au-dessus du Mi-0, la fréquence de cette note est $5 f_0/4 = 40.87$ Hz. Sa longueur est $4L/5 = 1.6$ m. **9)**La fréquence de Sol-3 est $12 f_0 = 392.4$ Hz pour la gamme harmonique et $440 \times 2^{-2/12} = 392.0$ Hz pour la gamme tempérée. On obtient donc une différence de 0.4 Hz entre les deux gammes pour la note de Sol-3.

Corrigé 2 Guide d'ondes sonores

10) Les équations traduisent la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la définition du potentiel des vitesses et la loi d'état linéarisé autour d'un état ρ_0. La quantité c^2 est la dérivée de p par rapport à ρ, à entropie constante lorsque l'on s'intéresse à des oscillations adiabatiques. **11)**Dans le cas 2D, on peut écrire $\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\,(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{w}}{\partial z}) = 0$, $\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial z}$, $\widetilde{u} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $\widetilde{w} = \frac{\partial\phi}{\partial z}$. **12)**Les conditions aux limites indiquent que la vitesse $\widetilde{u}$, normale aux parois d'équations respectives $x = 0$ et $x = d$, est nulle. Le fluide est donc compris entre deux parois rigides. **13)**En éliminant $\widetilde{p}$, $\widetilde{\rho}$ et $\widetilde{u}$, on montre que $\Delta\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$. En reportant l'expression de ϕ dans cette équation des ondes, on obtient $k_n^2 - n^2\,\pi^2/d^2 = \omega^2/c^2$ et donc $k_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - n^2\,\pi^2/d^2}$.

Corrigé 3 Réflexion et transmission en milieu peu profond

14)À l'ordre dominant en $k\,h$, on peut écrire $\phi(x,t) = \overline{B}\ \sin[k(x - c\,t) + \varphi]$ et donc $\widetilde{u} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = k\,\overline{B}\ \cos[k(x - c\,t) + \varphi]$ et $\widetilde{v} = 0$. Les trajectoires sont donc des segments de droite horizontaux. **15)**On obtient $c = \sqrt{g\,h}$ à l'ordre dominant. Les ondes de surface sont non dispersives en milieu peu profond. **16)**Les ondes harmoniques sont de la forme $\phi(x,y,t) = \overline{B}_-\ \sin[k(x - c\,t) + \varphi_-]$ ou $\phi(x,y,t) = \overline{B}_+\ \sin[k(x + c\,t) + \varphi_+]$. Comme $\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\,\eta = 0$, toute solution en $\eta(x,t)$ est la superposition d'ondes élémentaires de la forme $\eta(x,t) = \frac{k\,c}{g}\,\overline{B}_-\ \cos[k(x - c\,t) + \varphi_-]$ et $\eta(x,t) = -\frac{k\,c}{g}\,\overline{B}_+\ \cos[k(x + c\,t) + \varphi_+]$. La solution générale est de la forme $\eta(x,t) = F(x - c\,t) + G(x + c\,t)$.

Comme $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\,\eta = 0$ et $\widetilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, on en déduit que $\widetilde{u}(x,t) = -\frac{g}{c}\,F(x - c\,t) + \frac{g}{c}\,G(x + c\,t)$. **17)**L'élévation de la surface libre η et le débit $h\,\widetilde{u}$ sont continus (absence de ressaut) en $x = 0$. **18)**On a $c_1 = \sqrt{g\,h_1}$ et $c_2 = \sqrt{g\,h_2}$. **19)**En appliquant les conditions aux limites en $x = 0$, le raccordement de la solution $\eta = \eta_I + \eta_R$ pour $x < 0$ avec la solution $\eta = \eta_T$ pour $x > 0$ pour $x > 0$ s'écrit $f_I(-c_1\,t) + f_R(c_1\,t) = f_T(-c_2\,t)$ pour $[\![\eta]\!] = 0$ et $-c_1\,f_I(-c_1\,t) + c_1\,f_R(c_1\,t) = -c_2\,f_T(-c_2\,t)$ pour $[\![h\,\widetilde{u}]\!] = 0$ en utilisant les relations $c_1^2 = g\,h_1$ et $c_1^2 = g\,h_2$. On en déduit $f_T(X) = T\,f_I\left(\frac{c_1}{c_2}X\right)$ et $f_R(X) = -R\,f_I(-X)$ et donc $f_T(x - c_2\,t) = T\,f_I\left(\frac{c_1}{c_2}(x - c_2\,t)\right)$ et $f_R(x + c_1\,t) = -R\,f_I[-(x + c_1\,t)]$ avec $T = 2\,c_1/(c_1 + c_2)$ et $R = -(c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$. **20)**Dans le cas $h_1 \ll h_2$, on a $T = 0$ et $R = -1$. L'amplitude de la vague transmise est très petite car l'énergie de l'onde, initiallement comprise dans l'épaisseur h_1, se dilue dans l'épaisseur h_2. Le point $x = 0$ est un noeud de de l'oscillation stationnaire observée en $x < 0$. Dans le cas $h_2 \ll h_1$, on a $T = 2$ et $R = 1$. Le canal peu profond débouche sur un canal encore moins profond et l'amplitude de la vague transmise est double. Le point $x = 0$ est un ventre de l'oscillation stationnaire observée en $x < 0$.