Attention : *le livre "Wave Motion" doit impérativement être retourné avant le début de l'examen pour des raisons de logistique.*

NB : seules les notes personnelles manuscriptes sont autorisées. Ne pas oublier d'inscrire son nom sur chaque page. Durée 2h. Chaque question est notée sur un point.

EXERCICE 0.1 Trafic routier et feu vert

On considère le modèle de trafic routier $\frac{\partial R}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}[Q(R)]=0$ où $Q(R)=R\,V(R)$ et $V(R)=1-R^2$. On suppose que $R(X,0)=1$ pour $X<0$ et $R(X,0)=0$ pour $X>0$. Le feu, situé en $X=0$, passe au vert à $T=0$.

1) Tracer l'ensemble des caractéristiques dans le demi-plan $T\geq 0$.
2) Calculer $R(0,T)$ pour $T>0$.

EXERCICE 0.2 Ondes sur une corde tendue infinie

On considère le déplacement $y(x,t)$ d'une corde tendue infinie de tension T (N) et de masse linéique ρ (kg/m).

1) Donner l'expression de la constante c de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-c^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ vérifiée par le déplacement.
2) On suppose que $y(x,0)=y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=v_0(x)$. En considérant la solution générale $y(x,t)=f(x-c\,t)+g(x+c\,t)$, montrer que l'on peut écrire $f(X)+G(X)=y_0(X)$ et $-c\,f(X)+c\,g(X)=\varphi(X)$, où $\varphi(X)$ est un fonction que l'on exprimera en imposant $\varphi(0)=0$.
3) Calculer $f(X)$ et $g(X)$ dans le cas où $v_0(x)=-c\,y_0'(x)$.
4) On suppose que $y_0(x)=a/(1+x^2)$ et $v_0(x)=2\,a\,c\,x/(1+x^2)^2$. En déduire $y(x,t)$.
5) Tracer $y(x,t)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ pour plusieurs valeurs de $t\leq 0$.
6) Même question dans le cas $y_0(x)=a/(1+x^2)$ et $v_0(x)=0$.

EXERCICE 0.3 Réflexion et transmission des ondes élastiques

Dans le repère $(\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)$, on considère un milieu élastique infini résultant de la soudure d'un matériau (a), situé en $x<0$, de masse volumique ρ_a et de coefficients de Lamé λ_a et μ_a et d'un matériau (b), situé en $x>0$, de masse volumique ρ_b et de coefficients de Lamé λ_b et μ_b.

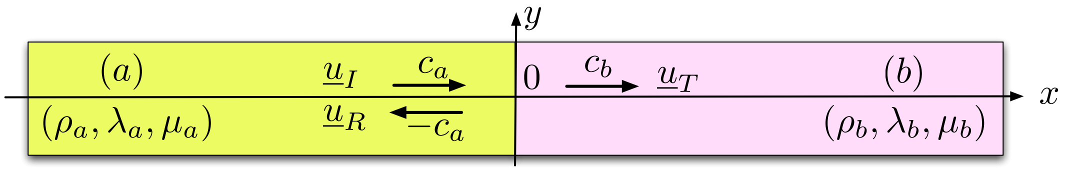

Figure 1: Réflexion et transmission d'une onde élastique $\underline{u}_I(x,t)$ par une discontinuité en $x=0$.

On note $\underline{u}=u\,\underline{e}_x+v\,\underline{e}_y+w\,\underline{e}_z$ le champ de déplacement et on s'intéresse à la réflexion et à la transmission d'une onde élastique incidente $\underline{u}_I(x,t)$ par cette discontinuité en $x=0$ (figure 1).

1) À partir des équations de Lamé $\rho\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{u}=(\lambda+\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{u})+\mu\,\Delta\,\underline{u}$, calculer, pour chacun des milieux, les vitesses de propagation respectives c_{1a} et c_{1b} des ondes longitudinales ainsi que vitesses de propagation respectives c_{2a} et c_{2b} des ondes transversales.

2) Le tenseur des contraintes étant donné par la loi de Hooke $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \,\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{e}})\, \underline{\underline{I}} + 2\,\mu\, \underline{\underline{e}}$, retrouver sans calcul l'expression de $\underline{\mathrm{div}}\; \underline{\underline{\sigma}}$. Que représente le tenseur $\underline{\underline{e}}$?
3) En notant $\underline{\underline{\sigma}}_a(x, y, z, t)$ et $\underline{\underline{\sigma}}_b(x, y, z, t)$ les tenseurs des contraintes respectifs des milieux (a) et (b), exprimer la relation de continuité des efforts de contact à l'interface $x = 0$.
4) Quelle est la deuxième relation vectorielle de continuité que l'on doit imposer sur cette interface en notation $\underline{u}_a$ et $\underline{u}_b$ les champs de déplacement respectifs des deux milieux ?

Onde incidente longitudinale

On considère la solution $\underline{u}_a(x, t) = \underline{u}_I + \underline{u}_R$ pour $x < 0$ et $\underline{u}_b(x, t) = \underline{u}_T$ pour $x > 0$ où

$$\underline{u}_I = f_I(x - c_a\, t)\, \underline{e}_x \;, \qquad \underline{u}_R = f_R(x + c_a\, t)\, \underline{e}_x \qquad \text{et} \qquad \underline{u}_T = f_T(x - c_b\, t)\, \underline{e}_x \;. \tag{1}$$

5) Donner l'expression de c_a et c_b en fonction des paramètres du problème.
6) En utilisant la relation de continuité du déplacement à l'interface $x = 0$, écrire la relation doivent vérifier les fonctions f_I, f_R et f_T pour tout temps.
7) Calculer les composantes du tenseur des petites déformations $\underline{\underline{e}}$. En déduire l'expression des forces de contact exercées sur la surface $x = 0$ par chacun des milieux.
8) En utilisant la relation de continuité des forces de contact à l'interface $x = 0$, écrire la relation doivent vérifier les fonctions dérivées f'_I, f'_R et f'_T pour tout temps.
9) Déduire des questions précédentes que l'on peut écrire

$$-f_R(c_a\, t) + f_T(-c_b\, t) = f_I(-c_a\, t) \qquad \text{et} \qquad f_R(c_a\, t) + \alpha\, f_T(-c_b\, t) = f_I(-c_a\, t) \;, \tag{2}$$

où α est un coefficient que l'on exprimera en fonction de ρ_a, λ_a, μ_a, ρ_b, λ_b et μ_b.
10) En déduire que $\underline{u}_T(x, t) = T\, f_I[\beta(x - c_b\, t)]$ et $\underline{u}_R(x, t) = -R\, f_I[\gamma(x + c_a\, t)]$ où T, R, β et γ sont des constantes que l'on déterminera. Que vaut $R + T$?
11) Discuter le cas $\rho_a\,(\lambda_a + 2\,\mu_a) \gg \rho_b\,(\lambda_b + 2\,\mu_b)$, puis le cas $\rho_a\,(\lambda_a + 2\,\mu_a) \ll \rho_b\,(\lambda_b + 2\,\mu_b)$. Dans chaque cas, indiquer si l'interface correspond à un noeud ou à un ventre pour le déplacement des ondes stationnaires.

Onde incidente transversale

On considère la solution $\underline{u}_a(x, t) = \underline{u}_I + \underline{u}_R$ pour $x < 0$ et $\underline{u}_b(x, t) = \underline{u}_T$ pour $x > 0$ où $\underline{u}_I = f_I(x - c_a\, t)\, \underline{e}_y$, $\underline{u}_R = f_R(x + c_a\, t)\, \underline{e}_y$ et $\underline{u}_T = f_T(x - c_b\, t)\, \underline{e}_y$.

12) Donner l'expression de c_a et c_b en fonction des paramètres du problème.
13) Montrer que l'on peut écrire $-f_R(c_a\, t) + f_T(-c_b\, t) = f_I(-c_a\, t)$ et $f_R(c_a\, t) + \alpha\, f_T(-c_b\, t) = f_I(-c_a\, t)$ où α est un coefficient que l'on exprimera en fonction de ρ_a, μ_a, ρ_b et μ_b.
14) Calculer les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente en fonction des paramètres du problème.

Corrigé page 3

Corrigé 1 Trafic routier et feu vert

1)Comme $C(R) = Q'(R) = 1 - 3\,R^2$, les droites caractéristiques sont tout d'abord les droites $X = -2\,(T - T_0)$ et $X = T - T_0$ avec $T_0 \leq 0$ pour les régions uniformes respectives de valeurs $R = 1$ et $R = 0$ situées respectivement à gauche de la droite caractéristique d'équation $X = -2\,T$ et à droite de la droite caractéristique d'équation $X = T$. Dans l'onde de détente centrée, située entre ces deux droites, les caractéristiques sont les droites passant par zéro et d'équations $X = C\,T$ avec $C \in [-2, 1]$ (figure 2). **2)**La droite $X = 0$ est telle que $C(R) = 1 - 3\,R^2 = 0$. On a donc $R(0, T) = 1/\sqrt{3}$.

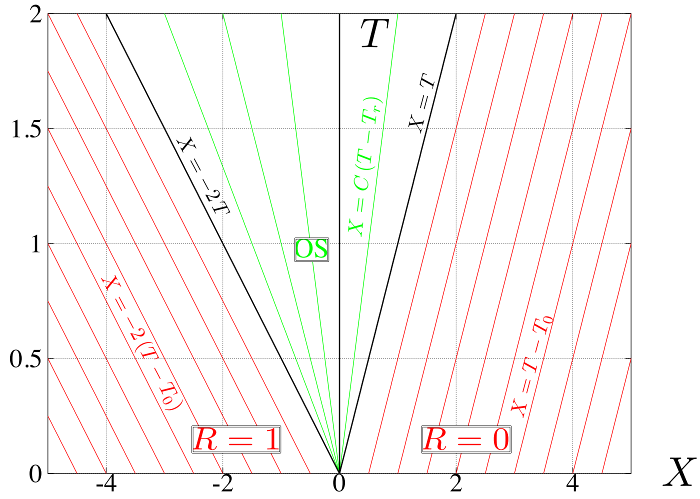

Figure 2: Onde de détente pour le modèle de trafic routier $C(R) = 1 - 3\,R^2$.

Corrigé 1 Ondes sur une corde tendue infinie

1)On a $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. **2)**On a $\varphi(X) = \int_0^X v_0(x)\,dx$. **3)**Dans le cas $v_0(x) = -c\,y_0'(x)$, on a $\varphi(X) = -c\,y_0(X)$ et donc $f(X) = y_0(X)$ et $g(X) = 0$. **4)**Comme $v_0(x) = -c\,y_0'(x)$, on a $y(x,t) = y_0(x - c\,t) = a/[1 + (x - c\,t)^2]$. Le tracé de $y(x,t)$ et $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ est effectué sur la figure 3a. **5)**Dans le cas $v_0(x) = 0$, on a $y(x,t) = \frac{1}{2}y_0(x - c\,t) + \frac{1}{2}y_0(x + c\,t) = \frac{1}{2}a/[1 + (x - c\,t)^2] + \frac{1}{2}a/[1 + (x + c\,t)^2]$. Le tracé de $y(x,t)$ et $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ est effectué sur la figure 3b.

Corrigé 3 Réflexion et transmission des ondes élastiques

1)On a $c_{1a} = \sqrt{\frac{\lambda_a + 2\,\mu_a}{\rho_a}}$, $c_{2a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\rho_a}}$, $c_{1b} = \sqrt{\frac{\lambda_b + 2\,\mu_b}{\rho_b}}$ et $c_{2b} = \sqrt{\frac{\mu_b}{\rho_b}}$. **2)**On a $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + \mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\ (\mathrm{div}\ \underline{u}) + \mu\,\Delta\,\underline{u}$. Le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{e}}$ a pour composantes $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. **3)**On doit avoir $\underline{\underline{\sigma}}_a(0,y,z,t)\cdot\underline{e}_x = \underline{\underline{\sigma}}_b(0,y,z,t)\cdot\underline{e}_x$ **4)**On doit avoir $\underline{u}_a(0,y,z,t) = \underline{u}_b(0,y,z,t)$.

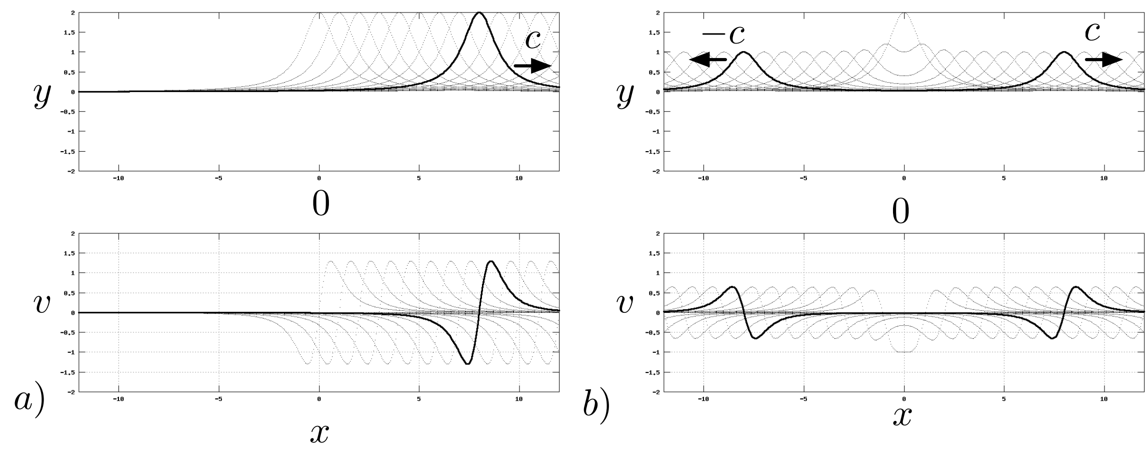

Figure 3: Tracés de y et v. a) $v_0 = -c\, y_0'$. b) $v_0 = 0$.

Onde incidente longitudinale

5)Comme les ondes sont longitudinales, on doit avoir $c_a = c_{1a}$ et $c_b = c_{1b}$. **6)**La continuité du déplacement en $x = 0$ entraine $f_I(-c_a\, t) + f_R(c_a\, t) = f_T(-c_b\, t)$. **7)**La seule composante non nulle de $\underline{\underline{e}}$ est $e_{xx} = u_{,x}$, c'est-à-dire $u_{a,x} = f_I'(x - c_a\, t) + f_R'(x + c_a\, t)$ pour $x < 0$ et $u_{b,x} = f_T'(x - c_b\, t)$ pour $x > 0$. La force de contact exercée sur l'interface est $-(\lambda_a + 2\,\mu_a)\, u_{a,x}(0, t)\, \underline{e}_x$ pour le milieu (a) et $(\lambda_b + 2\,\mu_b)\, u_{b,x}(0, t)\, \underline{e}_x$ pour le milieu (b). **8)**La continuité des forces de contact en $x = 0$ entraine $(\lambda_a + 2\,\mu_a)[f_I'(-c_a\, t) + f_R'(c_a\, t)] = (\lambda_b + 2\,\mu_b)\, f_T'(-c_b\, t)$. **9)**L'intégration par rapport au temps de la relation précédente entraine $(\lambda_a + 2\,\mu_a)[-\frac{1}{c_a}\, f_I(-c_a\, t) + \frac{1}{c_a}\, f_R(c_a\, t)] = -\frac{1}{c_b}(\lambda_b + 2\,\mu_b)\, f_T(-c_b\, t)$. Comme $c_a = c_{1a} = \sqrt{\frac{\lambda_a + 2\,\mu_a}{\rho_a}}$ et $c_b = c_{1b} = \sqrt{\frac{\lambda_b + 2\,\mu_b}{\rho_b}}$, on en déduit $\alpha = \frac{c_a\,(\lambda_b + 2\,\mu_b)}{c_b\,(\lambda_a + 2\,\mu_a)} = \sqrt{\frac{\rho_a\,(\lambda_a + 2\,\mu_a)}{\rho_b\,(\lambda_b + 2\,\mu_b)}}$. **10)**On a $R = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, $T = \frac{2}{\alpha + 1}$, $\beta = \frac{c_a}{c_b}$ et $\gamma = -1$. On a bien $R + T = 1$. **11)**Le cas $\rho_a\,(\lambda_a + 2\,\mu_a) \gg \rho_b\,(\lambda_b + 2\,\mu_b)$ s'écrit $\alpha \gg 1$ et conduit à $R = 1$ et $T = 0$. L'onde incidente est complétement réfléchie par un solide presqu'indéformable et l'interface est un noeud pour le déplacement qui s'y annule. Le cas $\rho_a\,(\lambda_a + 2\,\mu_a) \ll \rho_b\,(\lambda_b + 2\,\mu_b)$ s'écrit $\alpha \ll 1$ et conduit à $R = -1$ et $T = 2$. L'onde incidente est complétement réfléchie en présence d'un solide très déformable et l'interface est un ventre pour le déplacement qui est presque libre. Une onde d'intensité double se propage alors dans le milieu souple.

Onde incidente transversale

12) Comme les ondes sont longitudinales, on doit avoir $c_a = c_{2a}$ et $c_b = c_{2b}$. **13)**La continuité du déplacement en $x = 0$ entraine $f_I(-c_a\, t) + f_R(c_a\, t) = f_T(-c_b\, t)$. Les seules composantes non nulles de $\underline{\underline{e}}$ sont $e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} v_{,x}$. La continuité des forces de contact en $x = 0$ entraine $\mu_a[f_I'(-c_a\, t) + f_R'(c_a\, t)] = \mu_b\, f_T'(-c_b\, t)$. L'intégration par rapport au temps de la relation précédente entraine $\alpha = \frac{c_a\,\mu_b}{c_b\,\mu_a} = \sqrt{\frac{\rho_a\,\mu_a}{\rho_b\,\mu_b}}$. **14)**Comme précédemment on a $R = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ et $T = \frac{2}{\alpha + 1}$.