EXERCICE 0.1 Énergie de la houle

On s'intéresse aux petites oscillations irrotationnelles et 2D dans un plan (x,z) d'une couche fluide incompressible de masse volumique ρ et de profondeur h dont la surface libre est décrite par l'équation $z=\eta(x,t)$ avec η petit. Les forces extérieures de volume $\underline{f}=-\rho\, g\, \underline{e}_z$ sont dues à la gravité g. On note p_a la pression atmosphérique et on néglige la tension superficielle.

On s'intéresse à une onde de surface monochromatique définie par $\eta = a\cos(k\,x-\omega\,t)$ et $\phi=\frac{a\,g}{\omega\,\cosh(k\,h)}\cosh[k(z+h)]\sin(k\,x-\omega\,t)$ avec $\underline{U}=\underline{\text{grad}}\,\phi$, $k>0$ et $\omega=\sqrt{g\,k\,\tanh(k\,h)}$.

1) Calculer $\underline{U}\cdot\underline{e}_z$ en $z=-h$. Exprimer la pression $p(x,z,t)=p_a-\rho\,g\,z-\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t}$.
2) En utilisant le fait que $k\,\eta\ll 1$, montrer que p est constant en $z=\eta$ et indiquer sa valeur.
3) Que traduit la relation $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho\,\underline{U}^2+\rho\,g\,z\right)+\text{div}\,(p\,\underline{U})=0$?
4) Calculer $\overline{V}=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\int_0^\eta \rho\,g\,z\,dz\,dx$ avec $\lambda=2\,\pi/k$. Que représente la grandeur $\overline{V}$?
5) Que représente la grandeur $\overline{K}=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\int_{-h}^0\frac{1}{2}\rho\,\underline{U}^2\,dz\,dx$? On admet sans démonstration que $\overline{K}=\overline{V}$. Que représente la grandeur $H=\overline{K}+\overline{V}$. Quelle est sa dimension (unités) ?
6) Que représente la grandeur $E_F=\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^0 p\,\underline{U}\cdot\underline{e}_x\,dz\,dt$ avec $T=2\pi/\omega$? Quelle est sa dimension (unités) ? Montrer que $E_F=-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^0\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}\,dz\,dt$.
7) On admet sans démonstration que $E_F=c_g\,H$ où c_g est la vitesse de groupe. Exprimer E_F en fonction de ρ, g, a et h dans le cas des eaux peu profondes $k\,h\ll 1$.
8) On considère une houle en milieu peu profond telle que $a=1$ m et $h=3.6$ m. En prenant $\rho=1\ 000$ kg/m^3 et $g=10$ m/s^2, calculer la puissance P d'une centrale électrique qui récupérerait, avec un rendement de 1/3, l'énergie de la houle sur une ligne parallèle aux lignes de crêtes et de longueur $L=200$ m. On suppose toujours que $k\,h\ll 1$.

EXERCICE 0.2 Relation de dispersion des ondes capillaires

On s'intéresse aux petites oscillations irrotationnelles et 2D, dans un plan (x,z), d'une couche fluide incompressible de profondeur infinie dont la surface libre est décrite par l'équation $z=\eta(x,t)$ avec η petit. On note $\underline{f}=-\rho\,g\,\underline{e}_z$ les forces extérieures de volume où ρ est la masse volumique et g la gravité. On néglige les forces visqueuses.

La tension superficielle est responsable d'une discontinuité entre la pression p_f du fluide au niveau de sa surface libre et la pression p_a de l'atmosphère. Ce saut de pression s'écrit $p_f-p_a=\sigma/R$, où σ est une constante qui vaut $\sigma=0.07$ N m^{-1} pour l'eau et R le rayon de courbure de la surface libre dans le cas d'une déformation bidimensionnelle.

1) On admet sans démonstration que $R=-\left[1+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\right]^{3/2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^{-1}$. En déduire l'expression du saut de pression p_f-p_a à l'ordre dominant du petit paramètre η.
2) On suppose que le champ de vitesse de l'écoulement s'écrit $\underline{U}=\underline{\text{grad}}\,\phi$ où $\phi(x,z,t)$ est une fonction du même ordre de grandeur que η. Justifier la relation $\Delta\phi=0$.
3) Justifier la condition aux limites $\lim_{z\to-\infty}\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,z,t)=0$ pour tout x et tout t.
4) Justifier la relation $p=p_a-\rho\,g\,z-\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t}$.
5) Justifier la condition aux limites $\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial z}$ en $z=0$.
6) Exprimer la condition aux limites dynamique à en $z=\eta$ qui relie $\phi(x,0,t)$ et $\eta(x,t)$.
7) On cherche des solutions complexes sous la forme $\phi=\Phi(z)\,\exp(i\,k_x\,x-i\,\omega\,t)$. Justifier la forme $\Phi(z)=\Phi_m\,\exp(k\,z)$ où Φ_m est une amplitude complexe et $k=|k_x|$.
8) En déduire que la relation de dispersion s'écrit $\omega=\sqrt{(g+\gamma\,k^2)\,k}$ où γ est une constante

que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

9) Tracer ω en fonction de k. Donner ses équivalents pour k petit puis k grand.
10) Tracer la vitesse de phase c_p en fonction de k. Calculer sa valeur minimum c_*.
11) En-dessous de quelle longueur d'onde λ_* la tension superficielle est-elle négligeable ? Donner sa valeur numérique en prenant $g = 10$ m/s^2.

EXERCICE 0.3 Réflexion d'une onde solide primaire sur une surface libre

On considère l'équation de Lamé $\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\, \underline{\text{grad}}\, (\text{div}\, \underline{u}) + \mu\, \Delta \underline{u}$ (parfois appelée équation de Navier) où $\underline{u}(\underline{x}, t)$, avec $\underline{x} = x_1\, \underline{e}_1 + x_2\, \underline{e}_2 + x_3\, \underline{e}_3$, est le champ de déplacement d'un milieu élastique semi-infini contenu dans le demi-espace d'équation $x_2 \leq 0$. On rappelle que la loi de Hooke relie le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ au tenseur des petites déformations $\underline{\underline{e}}$ par la relation $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\, (\text{tr}\, \underline{\underline{e}})\, \underline{\underline{I}} + 2\, \mu\, \underline{\underline{e}}$. On note $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. On suppose que la surface $x_2 = 0$ est libre, ce qui implique que les forces de contacts $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e}_2$ y sont nulles, en négligeant la pression atmosphérique. On s'intéresse au champ de déplacement $\underline{u} = \underline{u}^I + \underline{u}^D + \underline{u}^R$ tel que

$$\begin{aligned}
&\underline{u}^I = \underline{A}^I \exp(i\, \underline{k}^I \cdot \underline{x} - i\, \omega_I\, t)\ , \ \underline{u}^D = \underline{A}^D \exp(i\, \underline{k}^D \cdot \underline{x} - i\, \omega_D\, t)\ , \ \underline{u}^R = \underline{A}^R \exp(i\, \underline{k}^R \cdot \underline{x} - i\, \omega_R\, t)\ ,\\
&\underline{A}^I = A_I(\sin\theta_I\, \underline{e}_1 + \cos\theta_I\, \underline{e}_2),\ \underline{A}^D = A_D(\sin\theta_D\, \underline{e}_1 - \cos\theta_D\, \underline{e}_2),\ \underline{A}^R = A_R(\cos\theta_R\, \underline{e}_1 + \sin\theta_R\, \underline{e}_2),\\
&\underline{k}^I = k_I(\sin\theta_I\, \underline{e}_1 + \cos\theta_I\, \underline{e}_2),\quad \underline{k}^D = k_D(\sin\theta_D\, \underline{e}_1 - \cos\theta_D\, \underline{e}_2),\quad \underline{k}^R = k_R(\sin\theta_R\, \underline{e}_1 - \cos\theta_R\, \underline{e}_2),
\end{aligned}$$

où A_I est un nombre réel, A_D et A_R deux nombres complexes, θ_I, θ_D et θ_R trois angles compris dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, k_I k_D et k_R trois nombres réels positifs et ω_I, ω_D et ω_R trois nombres réels positifs. On suppose que $\underline{u}^I$ est connu et l'on cherche à détermier $\underline{u}^D$ et $\underline{u}^R$ de sorte que $\underline{u}$ soit solution de l'équation de Lamé avec conditions de surface libre.

1) Décrire les plans de phase respectifs des ondes planes $\underline{u}^I$, $\underline{u}^D$ et $\underline{u}^R$ dans le demi-espace $x_2 \leq 0$ où elles se propagent.
2) Exprimer la divergence et le rotationnel des trois champs de déplacement $\underline{u}^I$, $\underline{u}^D$ et $\underline{u}^R$.
3) Pour chacun de ces trois ondes planes, indiquer leur nature longitudinale ou transverse.
4) En déduire l'expression de ω_I, ω_D et ω_R en fonction des nombres d'ondes et de c_1 ou c_2.
5) On note $u_1(\underline{x}, t)$ et $u_2(\underline{x}, t)$ les composantes du champ de déplacement $\underline{u} = u_1\, \underline{e}_1 + u_2\, \underline{e}_2$. Montrer que, pour tout $\underline{x}$ tel que $x_2 = 0$, on a $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + E\, \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$ et $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + F\, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$ où E et F sont des constantes que l'on exprimera en fonction de λ et μ.
6) On note $\varphi_L(x_1, t) = k_L\, x_1 \sin\theta_L - \omega_L\, t$, $G_L = (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_1)\, (\underline{k}^L \cdot \underline{e}_2) + (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_2)\, (\underline{k}^L \cdot \underline{e}_1)$ et $H_L = \lambda\, (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_1)\, (\underline{k}^L \cdot \underline{e}_1) + (\lambda + 2\, \mu)\, (\underline{A}^L \cdot \underline{e}_2)\, (\underline{k}^L \cdot \underline{e}_2)$ avec $L \in \{I, D, R\}$. Exprimer les conditions aux limites à l'aide des sommes $\sum_{L \in \{I,D,K\}} G_L\, e^{i\, \varphi_L}$ et $\sum_{L \in \{I,D,K\}} H_L\, e^{i\, \varphi_L}$.
7) En déduire que $k_D = k_I$, $k_R\, c_2 = k_I\, c_1$, $\theta_D = \theta_I$ et $c_1\, \sin\theta_R = c_2\, \sin\theta_I$.
8) On note $\Lambda_D = A_D/A_I$ et $\Lambda_R = A_R/A_I$. Montrer que ces coefficients vérifient les relations

$$\Lambda_R\, \frac{\cos(2\, \theta_R)}{\xi\, \sin(2\, \theta_I)} + \Lambda_D = 1 \quad \text{et} \quad \Lambda_R\, \frac{\sin(2\, \theta_R)}{\xi\, \cos(2\, \theta_I) - 2\, \xi + 1/\xi} - \Lambda_D = 1\ ,$$

où ξ est une constante que l'on exprimera en fonction de c_1 et c_2 uniquement.

9) Interpréter physiquement les calculs effectués. Montrer qu'en ajoutant à $\underline{u}$ une onde de Rayleigh on obtient une nouvelle solution du problème. En déduire qu'une onde incidente transversale ou longitudinale ne peut pas se réflechir en une onde de Rayleigh.

Corrigé page 3

Corrigé 1 Énergie de la houle

1) On a $\underline{U} \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, -h, t) = 0$ car $\sinh[k(z+h)]$ s'annule en $z = -h$. On a $p = p_{atm} - \rho\, g\, z + \frac{\rho\, a\, g}{\cosh(k\, h)} \cosh[k(z+h)] \cos(k\, x - \omega\, t)$. **2)** On peut écrire $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, \eta, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t)[1 + O(k\eta)]$. On a donc $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, \eta, t) \sim \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t) = a\, g \cos(k\, x - \omega\, t) = g\, \eta(x, t)$. On en déduit $p = p_{atm}$ en $z = \eta$. **3)** Comme $\frac{dz}{dt} = \underline{U} \cdot \underline{e}_z$, on a $\frac{d}{dt}(\rho\, g\, z) = -\underline{f} \cdot \underline{U}$. La relation $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho\, \underline{U}^2\right) + \mathrm{div}\,(p\, \underline{U}) = \underline{f} \cdot \underline{U}$ traduit donc la loi de conservation de l'énergie totale (l'énergie interne est constante car l'écoulement est isotherme et incompressible). **4)** On a $\int_0^\eta z\, dz = \frac{1}{2}\eta^2$. Comme $\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \cos^2[(2\pi\, x/\lambda - \omega\, t)]\, dx = \frac{1}{2}$, on a $\overline{V} = \frac{1}{4}\rho\, g\, a^2$. Cette grandeur représente l'énergie potentielle moyenne par unité de surface horizontale, son zéro étant fixé par la solution d'équilibre $\eta = 0$ et $\underline{U} = \underline{0}$. **5)** La grandeur $\overline{K}$ représente l'énergie cinétique moyenne par unité de surface. La grandeur H représente l'énergie totale moyenne de la houle par unité de surface horizontale. On a $H = \frac{1}{2}\rho\, g\, a^2$ en $\mathrm{J/m^2}$. **6)** La grandeur E_F représente le flux d'énergie à travers un plan vertical de normale $\underline{e}_x$, par unité de longueur dans la direction y, en W/m. Comme $\underline{U} \cdot \underline{e}_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et que $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ est périodique de période T en temps, on a $\int_0^T \underline{U} \cdot \underline{e}_x\, dt = 0$. Comme $p = (p_{atm} - \rho\, g\, z) - \rho\, \frac{\partial \phi}{\partial t}$, on a $\int_0^T p\, \underline{U} \cdot \underline{e}_x\, dt = -\int_0^T \rho\, \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial x}\, dt$. D'où l'expression de E_F recherchée. **7)** Dans le cas $k\, h \ll 1$, on a $c_g = \sqrt{g\, h}$. On a donc $E_F = \frac{1}{2}\rho\, g\, a^2 \sqrt{g\, h}$. **8)** On a $P = \frac{1}{3} E_F\, L = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\rho\, g\, a^2\, L\sqrt{g\, h} = 2$ MW.

Corrigé 2 Relation de dispersion des ondes capillaires

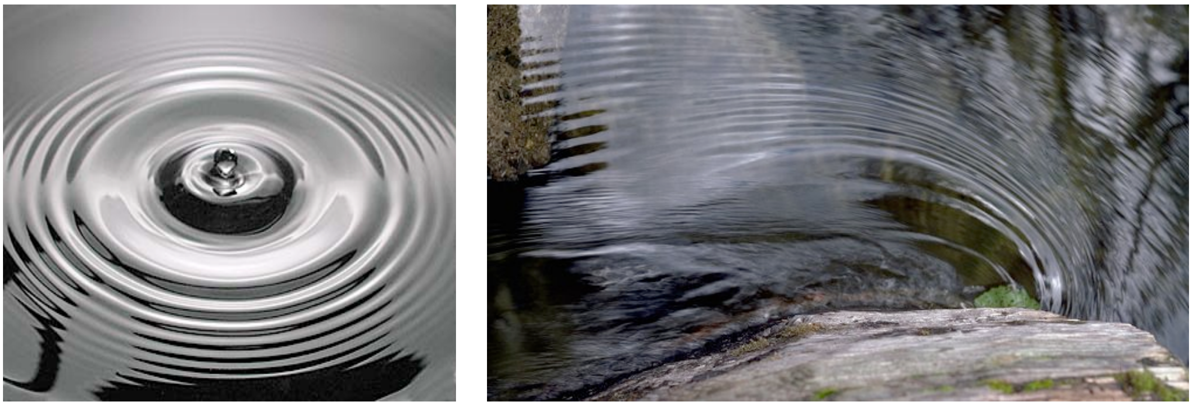

Figure 1: Visualisation d'ondes capillaires.

1) Comme $1/R = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + O(\eta^2)$, on a $p_f - p_a = -\sigma\, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ à l'ordre dominant en η. **2)** L'incompressibilité entraîne $\mathrm{div}\, \underline{U} = \mathrm{div}\,(\underline{\mathrm{grad}}\ \phi) = \Delta\phi = 0$. **3)** La vitesse normale $\underline{U} \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ est nulle au fond. Comme la profondeur est infinie, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ tend vers zero lorsque z tend vers $-\infty$. **4)** La relation de Bernouilli linéarisée $\underline{\mathrm{grad}}\ \left(\rho\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho\, g\, z + p\right) = 0$, obtenue en négligeant le terme $\underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U}^2$, entraine $\rho\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho\, g\, z + p = p_a$ par un choix judicieux de la jauge $\phi \to \phi + C(t)$ où $C(t)$ est un fonction arbitraire du temps. **5)** La condition aux limites cinématique $\frac{d}{dt}[z - \eta(x, t)] = \underline{U} \cdot \underline{e}_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \eta = 0$ se linéarise en $\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ en négligeant le terme $\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \eta$ et en tenant compte de $\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\ \phi$. **6)** La condition aux limites dynamique $p_f - p_a = -\sigma\, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ en $z = \eta$ s'écrit $-\rho\, g\, \eta - \rho\, \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sigma\, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$. En approximant $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, \eta, t)$ par $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t)$ à l'ordre dominant en η, on obtient $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t) = -g\, \eta(x, t) + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x, t)$. **7)** Ce choix de ϕ entraine $\Delta\phi = 0$ et $\lim_{z \to -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$. **8)** Les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\, \eta + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ en $z = 0$ entrainent

$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -g\,\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial z}$. En reportant ϕ dans cette équation, on obtient $-\omega^2 = -g\,k - \frac{\sigma}{\rho}\,k^3$. On en déduit $\omega = \sqrt{(g+\gamma\,k^2)\,k}$ avec $\gamma = \sigma/\rho$. **9)**La fonction $\omega(k)$ est croissante. On a $\omega(k) \sim \sqrt{g}\;k^{1/2}$ pour k petit $\omega(k) \sim \sqrt{\gamma}\;k^{3/2}$ pour k grand. **10)**La vitesse de phase est $c_p(k) = \omega(k)/k = (g/k+\gamma\,k)^{1/2}$. Elle tend vers l'infini pour k petit et k grand. Comme $c_p'(k) = \frac{1}{2}\left(-g/k^2+\gamma\right)/c_p(k)$, on a $k_* = \sqrt{g/\gamma} = \sqrt{\frac{\rho\,g}{\sigma}}$ et donc $c_* = \sqrt{2}\,(g/\gamma)^{1/4} \sim 0.8$ m/s. **11)**On peut négliger la tension superficiele pour $k > k_*$ c'est-à-dire $\lambda < \lambda_* = 2\,\pi/k_* = 2\,\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\,g}} = 1.7$ cm.

Corrigé 3 Réflexion d'une onde solide primaire sur une surface libre

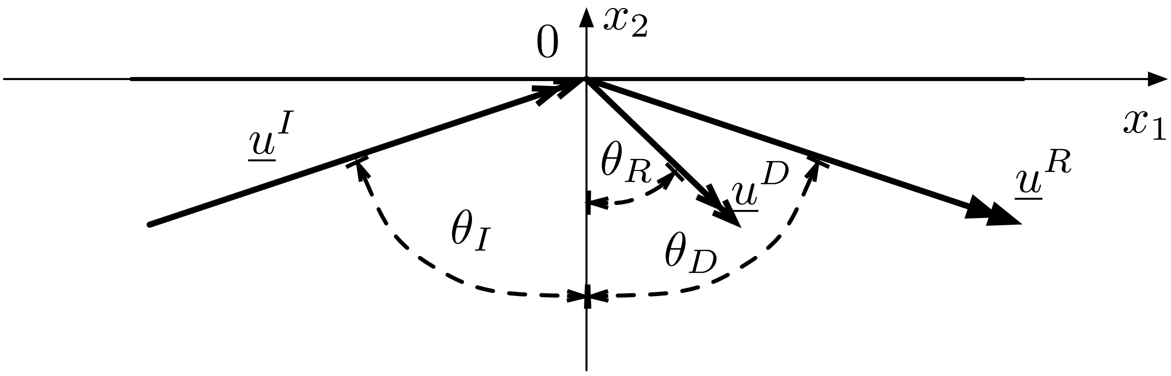

Figure 2: Réflexion d'une onde plane longitudinale en deux ondes planes.

1)Les plans de phase des ondes $\underline{u}^I$, $\underline{u}^D$ et $\underline{u}^R$ sont respectivement normaux aux vecteurs d'ondes $\underline{k}^I$, $\underline{k}^D$ et $\underline{k}^R$. **2)**On a $\operatorname{div}\underline{u}^I = i\,\underline{k}^I\cdot\underline{u}^I$ et $\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{u}^I = \underline{0}$, $\operatorname{div}\underline{u}^D = i\,\underline{k}^D\cdot\underline{u}^D$ et $\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{u}^D = \underline{0}$, $\operatorname{div}\underline{u}^D = 0$ et $\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{u}^D = i\,\underline{k}^R\wedge\underline{u}^R$. **3)**Les ondes planes $\underline{u}^I$ et $\underline{u}^D$ sont longitudinales tandis que l'onde plane $\underline{u}^R$ est transversale. **4)**On a donc $\omega_I = c_1\,k_I$, $\omega_D = c_1\,k_D$ et $\omega_R = c_2\,k_R$. **5)**Les forces de contacts exercées par l'atmosphère sur la surface libre d'équation $x_2 = 0$ sont $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{e}_2 = \sigma_{12}\,\underline{e}_1+\sigma_{22}\,\underline{e}_2 = \underline{0}$ avec $\sigma_{12} = \lambda\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$ et $\sigma_{22} = \lambda\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\,\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$. On obtient donc les valeurs $E = 1$ et $F = (\lambda+2\,\mu)/\mu$. **6)**Les conditions aux limites de surface libre s'écrivent $\sum_{L\in\{I,D,K\}} G_L\,e^{i\,\varphi_L} = 0$ et $\sum_{L\in\{I,D,K\}} H_L\,e^{i\,\varphi_L} = 0$. **7)**Comme elles sont valables pour tout x_1 et tout t, on doit avoir $k_I\,\sin\theta_I = k_D\,\sin\theta_D = k_R\,\sin\theta_R$ et $\omega_I = \omega_D = \omega_R =: \omega$. Comme $\omega_I = c_1\,k_I$, $\omega_D = c_1\,k_D$ et $\omega_R = c_2\,k_R$, on a $k_D = k_I$, $\theta_I = \theta_D$, $c_2\,k_R = c_1\,k_I$ et $c_1\,\sin\theta_R = c_2\,\sin\theta_I$. **8)**On a $G_I = A_I\,k_I\,\sin(2\,\theta_I)$, $G_D = A_D\,k_D\,\sin(2\,\theta_D)$ et $G_R = A_R\,k_R\,\cos(2\,\theta_R)$. On a de plus $H_I = A_I\,k_I\,[\lambda+\mu+\mu\,\cos(2\,\theta_I)]$, $H_D = A_D\,k_D\,[\lambda+\mu+\mu\,\cos(2\,\theta_D)]$ et $H_R = -A_R\,k_R\,\mu\,\sin(2\,\theta_R)$. Comme $\theta_I = \theta_D$, $k_I = k_D$, $k_I = \omega/c_1$, $k_R = \omega/c_2$, $\mu = \rho\,c_2^2$ et $\lambda = \rho\,(c_1^2 - 2\,c_2^2)$, on obtient les relations recherchées avec $\xi = c_2/c_1$. **9)**Une onde plane longitudinale $\underline{u}^I$ arrivant de manière oblique sur la surface libre se réfléchit en la somme d'une onde plane longitudinale $\underline{u}^D$ et d'une onde plane transversale $\underline{u}^R$. Les angles de réflexion obéissent à la loi de Snel. Comme une onde de Rayleigh vérifie naturellement les conditions aux limites en surface, elle ne peut être générée par la réflexion d'une autre onde et peut être ajoutée de manière arbitraire à toute solution, le problème étant linéaire.