EXERCICE 0.1 Paquet d'ondes

1) Effectuer le développement limité de $u = A \cos[kx - \omega(k)t] + A \cos[(k+\delta k)x - \omega(k+\delta k)t]$ pour $\delta k \ll k$ en supposant connues la pulsation $\omega(k)$ et la vitesse de groupe $c_g(k)$ associée.
2) Tracer $u(x,t)$ en fonction de x pour un temps t donné. Indiquer la vitesse de propagation des extrema relatifs et de l'enveloppe du paquet d'ondes.
3) Un pont traversant un canal s'écroule au passage d'une péniche qui continue sa course à la vitesse v. Au bout d'un certain temps, les passagers de la péniche observent une vague de longueur d'onde $L_0 = 0.624$ m qui se propage à la même vitesse qu'eux. En supposant que la profondeur du canal est infinie, calculer la vitesse v. On pourra prendre $g = 10$ m s^{-2}.

EXERCICE 0.2 Trafic routier

On considère le modèle de trafic routier $\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx = q(x_1,t) - q(x_2,t)$ avec $q = \rho\, v(\rho)$. On suppose ici que $v(\rho) = A - B\,\rho$ où A et B sont des constantes positives et on impose $0 \le \rho \le A/B$.

1) Donner l'expression de la vitesse $c(\rho_0)$ à laquelle se propagent les petites perturbations $\widetilde{\rho}$ de la solution homogène $\rho = \rho_0$.
2) On suppose que $\rho(x,t)$ admet un discontinuité mobile en $x = s(t)$ et on note ρ_- et ρ_+ les valeurs de ρ respectivement à gauche et à droite de la discontinuité. Calculer $\frac{ds}{dt}(t)$.
3) Comparer cette valeur avec $c(\rho_-) + c(\rho_+)$.
4) On considère la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ avec $\rho_0(x) = A/B$ pour $x \le 0$ et $\rho_0(x) = 0$ pour $x \ge 0$. Calculer $\rho(x,t)$ pour tout x et tout t et tracer cette fonction pour t fixé.
5) On considère la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ avec $\rho_0(x) = \rho_L$ pour $x \le 0$ et la condition aux limites $\rho(0,t) = A/B$ pour $t \in [0, T_R]$, $\rho(0,t) = A/(2B)$ pour $t \in [T_R, T_R + T_V]$ et $\rho(0,t) = \rho_L$ pour $t \ge T_R + T_V$ où T_R et T_V sont des constantes positives. On suppose que $\rho(x,t) = \rho_L$ pour $x \le 0$ et $t \ge T_R + T_V$. Calculer le rapport $\chi = T_R/T_V$ pour le cas où $\rho_L = A/(4B)$.

EXERCICE 0.3 Conditions initiales et équation des ondes

On considère l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ pour $x \in I\!R$ et $t \ge 0$ où c est une constante strictement positive. On considère les conditions initiales $y(x,0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$.

1) On suppose que $y_0(x) = a \sin(kx)$ avec a et k strictement positifs. Comment choisir $v_0(x)$ pour que la solution soit de la forme $y(x,t) = f(x - ct)$. Donner alors l'expression de $y(x,t)$ en fonction de a, k, x et t puis tracer son profil en x pour trois instants différents.
2) On suppose que $y_0(x) = a \sin(kx)$ et $v_0(x) = a\,k\,c \cos(kx)$ avec a et k strictement positifs. Exprimer $y(x,t)$ et tracer son profil en x pour trois instants différents.
3) Comment choisir $v_0(x)$ pour que la solution soit de la forme $y(x,t) = f(x+ct) + f(x-ct)$.
4) On suppose que $y_0(x) = a \cos(kx)$ et $v_0(x) = 0$ avec a et k strictement positifs. Exprimer $y(x,t)$ et tracer son profil en x pour trois instants différents.
5) On suppose que $y_0(x) = 0$ pour $x \le 0$ et $x \ge b$, $y_0(x) = 1$ pour $x \in [0,b]$ et $v_0(x) = 0$ pour tout x. Dessiner la solution $y_0(x,t)$ pour $t \in \{0, \tau/2, \tau, 2\tau\}$ avec $\tau = b/(2c)$.

EXERCICE 0.4 Ondes sonores

On considère les équations d'Euler compressibles

$$\Delta\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \quad \underline{\widetilde{U}} = \underline{\text{grad}}\ \phi, \quad \widetilde{p} = -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \widetilde{\rho} = \frac{1}{c^2}\widetilde{p}\,.$$

On s'intéresse à la propagation des ondes sonores dans un tube d'axe Ox et de section A_1 pour $x \leq 0$ et A_2 pour $x \geq 0$. On cherche des solutions de la forme $\phi = \phi_I(x-ct) + \phi_R(x+ct)$ pour $x \leq 0$ et $\phi = \phi_T(x-ct)$ pour $x \geq 0$.

1) Montrer que $\widetilde{p} = f_I(x-ct) + f_R(x+ct)$ pour $x \leq 0$ et $\widetilde{p} = f_T(x-ct)$ pour $x \geq 0$ où $f_I(X)$, $f_R(X)$ et $f_T(X)$ sont des fonctions de la variable muette X que l'on exprimera à l'aide de $\phi_I(X)$, $\phi_R(X)$ et $\phi_T(X)$.
2) Écrire la condition de continuité de la pression en $x = 0$ à l'aide de f_I, f_R et f_T.
3) Écrire la condition de continuité du débit en $x = 0$ à l'aide A_1, A_2, f_I, f_R et f_T.
4) En déduire $f_T(x-ct)$ et $f_R(x+ct)$ en fonction de f_I.
5) Que valent les coefficients de réflexion et de transmission pour $A_1 \ll A_2$ puis $A_1 \gg A_2$?

EXERCICE 0.5 Ondes élastiques

On considère l'équation de Lamé $\rho\dfrac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\,\underline{\text{grad}}\ (\text{div}\,\underline{u}) + \mu\,\Delta\underline{u}$ où $\underline{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ est le champ de déplacement d'un milieu élastique infini. On note $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

1) On considère le champ $\underline{u} = \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}, 0\right)$ avec $\phi = \phi_m\,\cos\left(k_1\,x_1 + k_2\,x_2 - \omega\,t\right)$ où ϕ_m, k_1, k_2 et ω sont des constantes réelles strictement positives. Quelle relation doivent vérifier ces constantes pour que $\underline{u}$ soit solution des équations de Lamé ?
2) Dessiner les iso-ϕ dans le plan Ox_1x_2 pour un instant donné. Indiquer la direction de la vitesse de phase sur le graphique et exprimer son module en fonction des paramètres du problème. Dessiner le champ de déplacement. Quelle est la nature de l'onde élastique observée ?
3) On considère le champs $\underline{u} = \left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}, 0\right)$ avec $\psi = \psi_m\,\cos\left(k_1\,x_1 + k_2\,x_2 - \omega\,t\right)$ où ψ_m, k_1, k_2 et ω sont des constantes réelles strictement positives. Quelle relation doivent vérifier ces constantes pour que $\underline{u}$ soit solution des équations ?
4) Dessiner les iso-ϕ, la direction de la vitesse de phase et le champ de déplacement. Quelle est la nature de l'onde élastique observée ?

On suppose maintenant que $\underline{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ est le champ de déplacement d'un milieu élastique semi-infini contenu dans le demi-espace $x_2 \leq 0$ dont la frontière $x_2 = 0$ est une surface libre. On considère le champ $\underline{u} = \left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}, 0\right) + \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}, 0\right)$ avec $\psi = A\,\cos(k\,x_1 - \omega\,t)\,e^{\alpha\,x_2}$ et $\phi = B\,\sin(k\,x_1 - \omega\,t)\,e^{\beta\,x_2}$ où A, B, α, β, k et ω sont des constantes réelles strictement positives.

5) Quelles relations doivent vérifier les constantes pour que $\underline{u}$ soit solution des équations.
6) Écrire les relations traduisant les conditions aux limites $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n} = \underline{0}$ en $x_2 = 0$.
7) En déduire une relation entre k, α, β et les coefficients de Lamé.
8) En déduire que ω est la racine d'un polynôme de degré trois que l'on explictera.

Corrigé 1 Paquet d'ondes

1) On a $u = 2\,A\,\cos\{(k+\delta k/2)x - [\omega(k+\delta k)+\omega(k)]t/2\}\ \cos\{\delta k\,x/2 - [\omega(k+\delta k)-\omega(k)]t/2\}$ en appliquant la formule $\cos p + \cos q = 2\,\cos(\frac{p+q}{2})\,\cos(\frac{p-q}{2})$. Pour $\delta k \ll k$, le développement limité de cette expression est $u = 2\,A\,\cos[k\,x - \omega(k)\,t]\,\cos\{\delta k[x - c_g(k)\,t]/2\} + O(\delta k)$. **2)** La fonction $u(x,t)$ à t fixé à la forme d'une sinusoïde de longueur d'onde $2\pi/k$ modulée par une enveloppe sinusoïdale de longueur d'onde $4\pi/\delta k$. Les extrema se propagent à la vitesse de phase $c_\varphi(k) = \omega(k)/k$. L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe $c_g(k) = \omega'(k)$. **3)** Comme la profondeur est grande devant la longueur d'onde L_0, la relation de dispersion des ondes de surface peut être approximée par $\omega(k) = \sqrt{g\,k}$. La vitesse de groupe est alors $c_g(k) = \omega'(k) = (1/2)\sqrt{g/k}$. En appliquant la méthode de la phase stationnaire, on obtient que $v = c_g(k_0)$ avec $k_0 = 2\pi/L_0$. On a donc $v = .5\,\sqrt{g\,L_0/(2\,\pi)} \sim 0.5$ m/s.

Corrigé 2 Trafic routier

1) Le bilan global conduit au bilan local $\frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$ avec $c(\rho) = q'(\rho)$ et $q(\rho) = \rho\,v(\rho) = A\,\rho - B\,\rho^2$. On a donc $c(\rho) = A - 2\,B\,\rho$. Comme $\frac{\partial\tilde\rho}{\partial t} + c(\rho_0)\frac{\partial\tilde\rho}{\partial x} = 0$ est l'équation d'évolution d'une petite perturbation, $c(\rho_0) = A - 2\,B\,\rho_0$ est sa vitesse de propagation. **2)** L'analyse du bilan global conduit à la relation $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{q(\rho_+)-q(\rho_-)}{\rho_+-\rho_-} = A - B\,\frac{\rho_+^2-\rho_-^2}{\rho_+-\rho_-} = A - B(\rho_+ + \rho_-)$. **3)** Comme $c(\rho_+) + c(\rho_-) = 2\,A - 2\,B\,(\rho_+ + \rho_-)$, on a $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{1}{2}\,[c(\rho_+) + c(\rho_-)]$. **4)** Le tracé des caractéristiques est celui d'une onde de détente centrée en $x = 0$. Pour $x \le c(A/B)\,t = -A\,t$ et $t \ge 0$, on a $\rho(x,t) = A/B$. Pour $x \ge c(0)\,t = A\,t$ et $t \ge 0$, on a $\rho(x,t) = 0$. Pour $-A\,t \le x \le A\,t$ et $t \ge 0$, la relation $c[\rho(x,t)] = x/t$ entraîne $\rho(x,t) = \frac{A}{2\,B} - \frac{x}{2\,B\,t}$. **5)** L'incompatibilité entre la condition initiale et la condition aux limites génère un choc qui se propage vers la gauche. À partir de $t = T_R$ les caractéristiques issues de l'axe Ot partent vers la gauche et dévient la trajectoire du choc jusqu'à ce qu'il passe du côté des $x \ge 0$ à $t = T_R + T_V$. En effet, s'il traversait l'axe Ot plus tard ou plus tôt que cet instant précis, la solution $\rho(x,t)$ ne serait pas égale à ρ_L pour $x \le 0$ et $t \ge T_R + T_V$. La condition aux limites $\rho(0,t) = \rho_*$ avec $\rho_* = A/(2B)$ est compatible avec l'existence de la caractéristique $x = c(\rho_*)\,t = 0$ démarrant à $t = T_R$ et interrompue en $t = T_R + T_V$ par le passage du choc. Le nombre de voitures $q(\rho_*)\,T_V$ comptées en $x = 0$ entre le temps $t = 0$ et le temps $t = T_R + T_V$ doit être égal au nombre de voitures $q(\rho_L)\,(T_R + T_V)$ arrivant de la gauche. On a donc $q(\rho_L)(1+\chi) = q(\rho_*)$ ce qui s'écrit $(A\,\rho_L - B\,\rho_L^2)(1+\chi) = (A\,\rho_* - B\,\rho_*^2)$. En remplaçant $\rho_L = A/(4B)$ et $\rho_* = A/(2B)$ par leur valeur, on obtient $\chi = 1/3$.

Corrigé 3 Conditions initiales et équation des ondes

1) Si $y(x,t) = f(x - c\,t)$, on a $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -c\,f'(x - c\,t)$ et donc $v_0(x) = -c\,y_0'(x)$. On a donc $y(x,t) = y_0(x - c\,t) = a\,\sin[k(x - c\,t)]$ si l'on choisit $v_0(x) = -k\,c\,a\,\cos(k\,x)$. Le tracé de $y(x,t)$ est celui d'une sinusoïde qui se propage vers la droite à la vitesse de phase c. **2)** On a $y(x,t) = y_0(x + c\,t) = a\,\sin[k(x + c\,t)]$. Le tracé de $y(x,t)$ est celui d'une sinusoïde qui se propage vers la gauche à la vitesse de phase c. **3)** Si $y(x,t) = f(x + c\,t) + f(x - c\,t)$, on a $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = c\,f'(x + c\,t) - c\,f'(x - c\,t)$ et donc $v_0(x) = c\,f'(x) - c\,f'(x) = 0$. On doit donc choisir $v_0(x) = 0$. Le tracé de $y(x,t)$ est formé de deux profils qui s'éloignent symétriquement vers la gauche et vers la droite. **4)** On a $y(x,t) = \frac{1}{2}\,a\,\cos(kx - ct) + \frac{1}{2}\,a\,\cos(kx + ct) = a\,\cos(kx)\,\cos(ct)$. Il s'agit d'une onde stationnaire avec des noeuds et des ventres. **5)** La condition initiale s'écrit $y_0(x) = H(x) - H(x - b)$. En appliquant la formule $y(x,t) = \frac{1}{2}\,[y_0(x - c\,t) + y_0(x + c\,t)]$, on obtient $y(x,t) = \frac{1}{2}\,[H(x + c\,t) - H(x + c\,t - b)] + \frac{1}{2}\,[H(x - c\,t) - H(x - c\,t - b)]$. Pour $t \in [0, \tau]$, on a $y(x,t) = 0$ pour $x \le -ct$, $y(x,t) = 1/2$ pour $x \in [-ct, ct]$, $y(x,t) = 1$ pour $x \in [ct, b - ct]$,

$y(x,t) = 1/2$ pour $x \in [b - ct, b + ct]$ et $y(x,t) = 0$ pour $x \geq b + ct$. Pour $t \geq \tau$, on a $y(x,t) = 0$ pour $x \leq -ct$, $y(x,t) = 1$ pour $x \in [-ct, b - ct]$, $y(x,t) = 0$ pour $x \in [b - ct, ct]$, $y(x,t) = 1$ pour $x \in [ct, b + ct]$ et $y(x,t) = 0$ pour $x \geq b + ct$.

Corrigé 4 Ondes sonores

1) Comme $\widetilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$, on a $f_I(X) = \rho_0\, c\, \phi_I'(X)$, $f_R(X) = -\rho_0\, c\, \phi_R'(X)$ et $f_T(X) = \rho_0\, c\, \phi_T'(X)$. **2)** La continuité de la pression en $x = 0$ s'écrit $f_I(-ct) + f_R(ct) = f_T(-ct)$ pour tout t. **3)** Comme $\widetilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, la continuité du débit $Q = \widetilde{u}\, A$ s'écrit $A_1\, \phi_I'(-ct) + A_1\, \phi_R'(ct) = A_2\, \phi_T'(-ct)$, ce qui conduit à $A_1\, f_I(-ct) - A_1\, f_R(ct) = A_2\, f_T(-ct)$. **4)** On en déduit $f_R(ct) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\, f_I(-ct)$ et $f_T(-ct) = \frac{2\, A_1}{A_1 + A_2}\, f_I(-ct)$. Comme $f_R(X) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\, f_I(-X)$ et $f_T(X) = \frac{2\, A_1}{A_1 + A_2}\, f_I(X)$, on a $f_R(x + ct) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\, f_I(-x - ct)$ et $f_T(x - ct) = \frac{2\, A_1}{A_1 + A_2}\, f_I(x - ct)$. **5)** Pour $A_1 \ll A_2$, le coefficient de réflexion est -1 et le coefficient de transmission est très petit. La cavité A_2 impose une pression constante. Pour $A_1 \gg A_2$, le coefficient de réflexion est 1 et le coefficient de transmission est 2. La discontinuité de section impose une vitesse nulle pour la cavité de gauche. L'onde transmise est deux fois plus intense (par unité de surface) que l'onde incidente.

Corrigé 5 Ondes élastiques

1) Ce champ de déplacement est irrotationnel. Sa divergence $d = \Delta \phi$ vérifie $\Delta d = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$. Comme $\Delta \phi = -k^2\, \phi$ avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ et donc $\Delta \phi = -k^2\, d$, la relation de dispersion $\omega^2 = c_1^2\, (k_1^2 + k_2^2)$ doit être vérifiée. **2)** Les iso-ϕ sont des droites perpendiculaires à (k_1, k_2) dans le plan Ox_1x_2. Elles se propagent à la vitesse $c_p = \omega/k = c_1$ dans la direction parallèle à $(k_1, k_2, 0)$. Le champ de déplacement est parallèle à ce vecteur. Il s'agit d'une onde longitudinale. **3)** Ce champ de déplacement est à divergence nulle. Son rotationnel $\underline{r} = (0, \Delta\psi, 0)$ vérifie $\Delta \underline{r} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}$. Comme $\Delta \psi = -k^2\, \psi$ avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ et donc $\Delta \underline{r} = -k^2\, \underline{r}$, la relation de dispersion $\omega^2 = c_2^2\, (k_1^2 + k_2^2)$ doit être vérifiée. **4)** Les iso-ψ sont des droites perpendiculaires à (k_1, k_2) dans le plan Ox_1x_2. Elles se propagent à la vitesse $c_p = \omega/k = c_2$ dans la direction parallèle à $(k_1, k_2, 0)$. Le champ de déplacement est perpendiculaire à ce vecteur. Il s'agit d'une onde transversale. **5)** On doit avec $\Delta d = \dfrac{1}{c_1^2} \dfrac{\partial^2 d}{\partial t^2}$ avec $d = \Delta \phi$ et $\Delta \underline{r} = \dfrac{1}{c_2^2} \dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}$ avec $\underline{r} = (0, \Delta \psi, 0)$. En reportant l'expression de ϕ et ψ dans ces équations, on obtient $\omega^2 = c_2^2(k^2 - \alpha^2)$ et $\omega^2 = c_1^2(k^2 - \beta^2)$. **6)** On a $\sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1})$, $\sigma_{22} = \lambda\, u_{1,1} + (\lambda + 2\,\mu)\, u_{2,2}$ et $\sigma_{33} = 0$. On en déduit $-A(k^2 + \alpha^2) + 2\, B\, k\, \beta = 0$ et $-2\,\mu\,\alpha\, k\, A + \left[(\lambda + 2\,\mu)\beta^2 - \lambda\, k^2\right] B = 0$. **7)** Puisque A et B sont non nuls, le déterminant du système linéaire 2x2 qu'ils satisfont doit être nul. Ceci s'écrit $(\alpha^2 + k^2)\left[(\lambda + 2\,\mu)\beta^2 - \lambda\, k^2\right] = 4\,\mu\,\alpha\,\beta\, k^2$. **8)** En élevant la dernière relation au carré et en remplaçant $\alpha^2 = k^2 - \omega^2/c_2^2$ et $\beta^2 = k^2 - \omega^2/c_1^2$ par leur expression en fonction de ω, on obtient la relation $(2 - X)^4 = 16(1 - X)(1 - \xi\, X)$ avec $X = \frac{\omega^2}{c_2^2\, k^2}$ et $\xi = c_2^2/c_1^2$. On a utilisé les relation $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = c_1^2/c_2^2$ et $\frac{\lambda}{\mu} = c_1^2/c_2^2 - 2$. Comme $X = 0$ est une racine évidente, on écrit $(X - 2)^4 - 16 = [(X-2)^2 - 4][(X-2)^2 + 4] = (X^2 - 4\, X)(X^2 - 4\, X + 8) = 16\,\xi\, X^2 - 16\,(1 + \xi)\, X$. En simplifiant par X, on obtient $P(X) = X^3 - 8\, X^2 + (24 - 16\,\xi)X - 16\,(1 - \xi) = 0$. Comme $c_2 < c_1$, on a donc $\xi < 1$. La cubique $X^3 - 8\, X^2$ et de la droite $16(1 - \xi) - (24 - 16\,\xi)X$ n'ont qu'une seule intersection comme le montre un tracé graphique. Comme $P(0) = -16(1 - \xi) < 0$ et $P(1) = 1$, le polynôme $P(X)$ admet une racine réelle unique $X_1 \in [0, 1]$. La relation de dispersion des ondes de Rayleigh est alors $\omega = \pm\sqrt{X_1}\, c_2\, k$. Leur vitesse de propagation est plus petite que c_2.