NB : seul le livre du cours en anglais est autorisée. Durée 1h45. Chaque question vaut un point.

EXERCICE 0.1 Feux en présence de trafic dense

On considère le modèle de trafic routier $\frac{d}{dT}\int_{X_1}^{X_2} R(X,T)\,dX + [Q(X,T)]_{X_1}^{X_2} = 0$ avec $V(R) = 1-R$ et $Q(R) = R\,V(R)$. On suppose que $R = R_1$ pour $T \leq 0$ où $1/2 < R_1 < 1$ est une constante indépendante de l'espace et du temps.

Feu rouge

Pour $T \geq 0$, un feu rouge situé en $X = 0$ impose la condition aux limites $V[R(0^-,T)] = 0$ pour $X = 0^-$ et $R(0^+,T) = 0$ pour $T > 0$, séparant ainsi le domaine spatial en deux demi-droites disjointes d'équations respectives $X < 0$ et $X > 0$.

1) Écrire l'équation des droites caractéristiques pour $T \leq 0$.
2) Tracer ces droites dans le demi-plan $(X,T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ dans le cas $R_1 = 3/4$.
3) Donner l'expression de la vitesse du choc W_g qui se propage dans la région $(X,T) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$.
4) Tracer la trajectoire de ce choc ainsi que les droites caractéristique dans la région $(X,T) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ pour le cas $R_1 = 3/4$.

Feu vert

À $T = T_r$, le feu passe au vert connectant ainsi les demi-droites $X < 0$ et $X > 0$. On note $X = S(T)$ l'équation du choc située à gauche du feu vert à partir du temps T_a pour lequel sa vitesse n'est plus uniforme.

5) Écrire l'équation des droites caractéristiques qui coupent l'axe OT pour $T \geq T_r$.
6) Tracer ces droites dans le cas $R_1 = 3/4$.
7) Exprimer le temps T_a à partir duquel la vitesse du choc d'équation $X = S(T)$ n'est plus égale à W_g. Donner sa valeur pour $R_1 = 3/4$.
8) Exprimer $R(X,t)$ en fonction de X et T pour tout point (X,T) situé à droite du choc tel que $X \leq$ et $T \geq T_r$.
9) En déduire une équation différentielle pour la fonction $S(T)$ de la trajectoire de ce choc. On ne demande pas d'en déduire l'expression de $S(T)$.
10) Montrer que ce choc ne peut pas traverser l'axe OT lorsque $R_1 > 1/2$.

Corrigé 4 Feux en présence de trafic dense

Feu rouge

1)Les droites caractéristiques pour $T \leq 0$ ont pour équation $X = X_0 + C(R_1)\,T$ avec $C(R_1) = 1 - 2\,R1$. **2)**Pour $R_1 = 3/4$, on a $C(R_1) = -1/2$. Les droites caractéristiques propagent l'information vers la gauche en remontant le sens du trafic. **3)**Le point A, à l'intersection de la trajectoire $X = -R_1\,T$ du choc et de la première droite caractéristique $X = -(T - T_r)$ a pour coordonnée (X_a, T_a) avec $T_a = T_r/(1 - R_1)$. **4)**Comme $R^- = R_1$ et $R^+ = 1$, on a $W_g = [C(R_1) + C(1)]/2 = -R_1 = -3/4$ pour $R_1 = 3/4$. **5)**La trajectoire du choc est un droite d'équation $X = -3\,T/4$.

Feu vert

6)Les droites caractéristiques de l'onde de détente sont issues du point $(X,T) = (0, T_r)$ et admettent pour équations $X = C\,(T - T_r)$ avec $C \in [-1, 1]$. **7)**Le tracé de ce faisceau de droites concourrantes ne dépend pas de la valeur de R_1. **8)**On peut écrire $X = C[R(X,T)]\,(T - T_r)$ le long d'une caractéristique de l'onde de détente, c'est-à-dire $X = [1 - 2\,R(X,T)]\,(T - T_r)$. On en déduit $R(X,T) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X}{T - T_r}\right)$. **9)**La vitesse du choc est $\dot S = \frac{1}{2}\,[C(R_1) + C\,([R(S,T)])] = 1 - R_1 - R(S,T) = 1 - R_1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{S}{T - T_r}\right)$. **10)**Si le choc traversait l'axe OT, sa vitesse serait $W = \frac{1}{2}[C(R_1) + C(1)] = 1/2 - R_1$. Comme $W < 0$ puisque $R_1 > 1/2$, cela n'est pas possible.

EXERCICE 0.2 Ondes sur une corde tendue infinie

On considère le déplacement $y(x,t)$ d'une corde tendue infinie de tension T (N) et de masse linéique ρ (kg/m).

1) Donner l'expression de la constante c de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ vérifiée par le déplacement.
2) On suppose que $y(x,0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$. En considérant la solution générale $y(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$, montrer que l'on peut écrire $f(X) + g(X) = y_0(X)$ et $-c\,f(X) + c\,g(X) = \varphi(X)$, où $\varphi(X)$ est un fonction que l'on exprimera en imposant $\varphi(0) = 0$.
3) Calculer $f(X)$ et $g(X)$ dans le cas où $v_0(x) = -c\,y_0'(x)$.
4) On suppose que $y_0(x) = a/(1 + x^2)$ et $v_0(x) = 2\,a\,c\,x/(1 + x^2)^2$. En déduire $y(x,t)$.
5) Tracer $y(x,t)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ pour plusieurs valeurs de $t \le 0$.
6) Même question dans le cas $y_0(x) = a/(1 + x^2)$ et $v_0(x) = 0$.

Corrigé Ondes sur une corde tendue infinie

1)On a $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. **2)**On a $\varphi(X) = \int_0^X v_0(x)\,dx$. **3)**Dans le cas $v_0(x) = -c\,y_0'(x)$, on a $\varphi(X) = -c\,y_0(X)$ et donc $f(X) = y_0(X)$ et $g(X) = 0$. **4)**Comme $v_0(x) = -c\,y_0'(x)$, on a $y(x,t) = y_0(x - c\,t) = a/[1 + (x - c\,t)^2]$. Le tracé de $y(x,t)$ et $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ est effectué sur la figure 1a. **5)**Dans le cas $v_0(x) = 0$, on a $y(x,t) = \frac{1}{2}y_0(x - c\,t) + \frac{1}{2}y_0(x + c\,t) = \frac{1}{2}a/[1 + (x - c\,t)^2] + \frac{1}{2}a/[1 + (x + c\,t)^2]$. Le tracé de $y(x,t)$ et $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ est effectué sur la figure 1b.

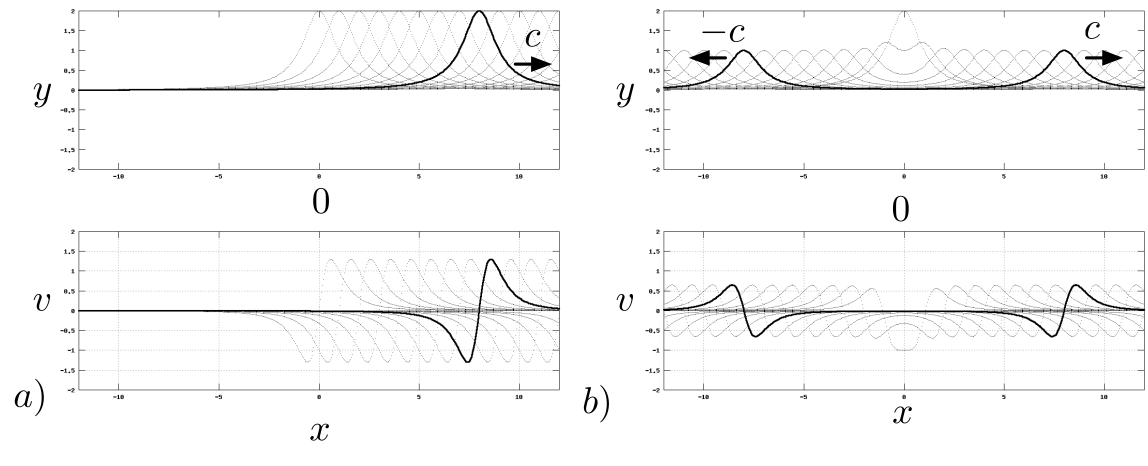

Figure 1: Tracés de y et v. a) $v_0 = -c\,y_0'$. b) $v_0 = 0$.

EXERCICE 0.3 Guide d'ondes sonores

On considère les équations d'Euler linéarisées

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \, \text{div} \, \underline{\widetilde{u}} = 0 \,, \quad \frac{\partial \underline{\widetilde{u}}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \underline{\text{grad}} \, \widetilde{p} \,, \quad \underline{\widetilde{u}} = \underline{\text{grad}} \, \phi \,, \quad \widetilde{p} = c^2 \, \widetilde{\rho} \,. \tag{1}$$

1) Interpréter brièvement les équations de ce modèle. Comment est défini c lorsque les tranformations induites par le mouvement sont adiabatiques ?
2) On considère le cas 2D pour lequel les champs ne dépendent pas de la coordonnée y. Expliciter les équations en notant $\widetilde{u}$ et $\widetilde{w}$ les composantes non nulles de la vitesse.
3) On considère le domaine $0 \leq x \leq d$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ en $x = 0$ et $x = d$. Interpréter ces conditions aux limites et faire un schéma pour illustrer le problème.
4) On cherche des solutions de la forme $\phi(x, z, t) = 2\, A \cos\left(\frac{n\,\pi\, x}{d}\right) e^{i\,(\omega\, t - k_n\, z)}$ où n est un entier. Exprimer $k_n > 0$ en fonction de n, c, d et ω pour les valeurs de n où il est défini.

Corrigé Guide d'ondes sonores

1)Les équations traduisent la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la définition du potentiel des vitesses et la loi d'état linéarisé autour d'un état ρ_0. La quantité c^2 est la dérivée de p par rapport à ρ, à entropie constante lorsque l'on s'intéresse à des oscillations adiabatiques. **2)**Dans le cas 2D, on peut écrire $\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \,(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial z}) = 0$, $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial z}$, $\widetilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $\widetilde{w} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$. **3)**Les conditions aux limites indiquent que la vitesse $\widetilde{u}$, normale aux parois d'équations respectives $x = 0$ et $x = d$, est nulle. Le fluide est donc compris entre deux parois rigides. **4)**En éliminant $\widetilde{p}$, $\widetilde{\rho}$ et $\widetilde{u}$, on montre que $\Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$. En reportant l'expression de ϕ dans cette équation des ondes, on obtient $k_n^2 - n^2\, \pi^2/d^2 = \omega^2/c^2$ et donc $k_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - n^2\, \pi^2/d^2}$.

EXERCICE 0.4 Océan de profondeur infinie

On considère une couche fluide de profondeur infine et de surface libre d'équation $y = \eta(x, t)$. On suppose que le champ de vitesse est de la forme $\underline{U} = \underline{\text{grad}}\ \phi$. On note p_{atm} la pression atmosphérique. On s'intéresse aux petites oscillations pour lesquelles ϕ et η sont petits.

1) Exprimer le champ de pression en fonction de ϕ et η. Écrire le système d'équation que vérifient ϕ et η. Pourquoi peut-on écrire les conditions aux limites en $y = 0$ au lieu de $y = \eta(x, t)$?
2) Éliminer η entre les conditions aux limites cinématiques et dynamiques en $y = 0$.
3) On cherche des solutions de la forme $\phi(x, y, t) = F(x - c\,t)\, Y(y)$. Montrer que $Y(x) = C \exp(k\, y)$ où C est k sont des constantes réelles. En déduire l'expression de F.
4) Exprimer la relation de dispersion des ondes de surface en milieu infini. Comparer avec le cas de profondeur h finie $\omega^2 = g\, k \tanh(k\, h)$.
5) Exprimer le champ de pression $p(x, y, t)$.

EXERCICE 0.5 Ondes élastiques stationnaires

On note $\underline{x} = x_1\, \underline{e}_1 + x_2\, \underline{e}_2 + x_3\, \underline{e}_3$ un point de l'espace et on s'intéresse à des champs de déplacement de la forme $\underline{u}(x_1, t) = u_1\, \underline{e}_1 + u_2\, \underline{e}_2$ pour un solide élastique occupant l'espace $0 \leq x_1 \leq l$ où l compris entre deux plaques planes d'équations respectives $x_1 = 0$ et $x_1 = l$.

1) Rappeler brièvement la détermination des vitesses $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ à partir des équation de Lamé $\rho\,\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\ \underline{\mathrm{grad}}\ (\mathrm{div}\ \underline{u}) + \mu\,\Delta \underline{u}$.
2) On suppose que $u_2 = 0$ et $u_1 = \sin(k\,x_1)\ \sin(\omega\,t)$ avec $k = \pi/l$. Calculer ω.
3) On suppose que $u_1 = 0$ et $u_2 = \cos(k\,x_1)\ \sin(\omega\,t)$ avec $k = \pi/l$. Calculer ω.
4) Calculer les contraintes $\underline{T}$ exercées par les plaques sur le solide dans pour chacun des questions précédentes

Corrigé   Ondes élastiques stationnaires

1)En prenant la divergence puis le rotationnel de l'équation de Navier, on obtient respectivemenet une équation des ondes pour la divergence d ou le rotationnel $\underline{r}$ du champ de déplacement, avec les vitesses respectives c_1 et c_2. **2)**Il s'agit d'une onde stationnaire longitudinale, d'ou $\omega_1 = k\,c_1$. **3)**Il s'agit d'une onde stationnaire transversale, d'ou $\omega_2 = k\,c_2$. **4)**En utilisant la loi de Hooke, on obtient $\underline{T} = (\lambda + 2\,\mu)\,k\ \sin(\omega_1\,t)\,\underline{e}_1$ pour l'onde stationnaire longitudinale et $\underline{T} = \underline{0}$ pour l'onde stationnaire transversale.