*NB : seul le livre du cours en anglais est autorisée. Durée 1h45. Chaque question vaut un point.*

## EXERCICE 0.1 Réflexion et transmission pour les cordes et les tubes

### Cordes tendues

On considère l'équation des ondes 1D $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ qui régit les petits déplacements latéraux d'une corde tendue avec la force de tension $T$. On suppose que cette corde est constituée d'une corde de masse volumique $\rho_1$ pour $x < 0$ et d'une corde de masse volumique $\rho_2$ pour $x > 0$.

1) Exprimer les vitesses respectives $c_1$ et $c_2$ des ondes dans chacune des deux parties.
2) Justifier la condition de raccord $y(0^-, t) = y(0^+, t)$.
3) Justifier la condition de raccord $\frac{\partial y}{\partial x}(0^-, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0^+, t)$.

On s'intéresse à des solutions de la forme $y(x, t) = f_I(x - c_1\, t) + f_R(x + c_1\, t)$ pour $x < 0$ et $y(x, t) = f_T(x - c_2\, t)$ pour $x > 0$.

4) Interpréter cette forme de solution.
5) Écrire les conditions aux limites de raccord en $x = 0$ à l'aide des fonctions $f_I$, $f_R$ et $f_T$.
6) Montrer que $f_T(x - c_2\, t) = T\, f_I[\beta_T\,(x - c_2\, t)]$ et $f_R(x + c_1\, t) = -R\, f_I[\beta_R\,(x + c_1\, t)]$ où $\beta_T$, $\beta_R$, $T$ et $R$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de $c_1$ et $c_2$.
7) Montrer que $T + R = 1$ et interpréter cette égalité.
8) Examiner les cas $\rho_1 \ll \rho_2$ et commenter les valeurs approchées de $R$ et de $T$ obtenues.
9) Examiner les cas $\rho_1 \gg \rho_2$ et commenter les valeurs approchées de $R$ et de $T$ obtenues.

### Tube sonore

On considère l'équation des ondes 1D $\frac{\partial^2 \widetilde{p}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ qui régit les petites vibrations longitudinales d'un gaz dans un tube, $\phi$ est le potentiel des vitesses.

10) Indiquer les hypothèses, les principes de la mécanique ou de la thermodynamique dont découlent le modèle $\widetilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} = 0$, $\widetilde{p} = -\rho_0\,\frac{\partial \phi}{\partial t}$, $\widetilde{p} = c_0^2\,\widetilde{\rho}$.
11) Exprimer $c_0$ en fonction de $p_0$ et $\rho_0$ en supposant que le fluide est un gaz parfait.
12) Que représente la grandeur $Q = A_0\,\widetilde{u}$ si $A_0$ est la section du tube ?
13) On appelle admittance la grande $Y_0 = A/(\rho_0\, c_0)$. Montrer que si $\widetilde{p} = f(x - c_0\, t)$ où $f$ est une fonction quelconque, on a $Q = Y_0\,\widetilde{p}$.
14) Montrer que si $\widetilde{p} = g(x + c_0\, t)$ où $g$ est une fonction quelconque, on a $Q = -Y_0\,\widetilde{p}$.

On suppose que ce tube est constitué d'un tube de section $A_1$ pour $x < 0$ et de section $A_2$ pour $x > 0$. On suppose que la pression, la masse volumique et la température l'état de repos (pas de son) sont respectivement $(p_0, \rho_1, T_1)$ pour $x < 0$ et $(p_0, \rho_2, T_2)$ pour $x > 0$.

15) Exprimer les vitesses respectives $c_1$ et $c_2$ des ondes dans chacune des deux parties.
16) Justifier la condition de raccord $f_I(-c_1\, t) + f_R(c_1\, t) = f_T(-c_2\, t)$ pour tous temps $t$.
17) Justifier la condition de raccord $Y_1\, f_I(-c_1\, t) - Y_1\, f_R(c_1\, t) = Y_2\, f_T(-c_2\, t)$ pour tous temps $t$.
18) Montrer que $f_T(x - c_2\, t) = T\, f_I[\beta_T\,(x - c_2\, t)]$ et $f_R(x + c_1\, t) = -R\, f_I[\beta_R\,(x + c_1\, t)]$ où $\beta_T$, $\beta_R$, $T$ et $R$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de $c_1$, $c_2$, $Y_1$ et $Y_2$.
19) Montrer que $T + R = 1$ et interpréter cette égalité.
20) Examiner les cas $A_1 \ll A_2$ et commenter les valeurs approchées de $R$ et de $T$ obtenues.
21) Examiner les cas $A_1 \gg A_2$ et commenter les valeurs approchées de $R$ et de $T$ obtenues.

## EXERCICE 0.2 Trafic routier et feu vert

On considère le modèle de trafic routier $\frac{\partial R}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}[Q(R)]=0$ où $Q(R)=R\,V(R)$ et $V(R)=1-R^2$. On suppose que $R(X,0)=1$ pour $X<0$ et $R(X,0)=0$ pour $X>0$. Le feu, situé en $X=0$, passe au vert à $T=0$.

1) Tracer l'ensemble des caractéristiques dans le demi-plan $T\geq 0$.
2) Calculer $R(0,T)$ pour $T>0$.

## EXERCICE 0.3 Relation de dispersion des ondes capillaires

On s'intéresse aux petites oscillations irrotationnelles et 2D, dans un plan $(x,z)$, d'une couche fluide incompressible de profondeur infinie dont la surface libre est décrite par l'équation $z=\eta(x,t)$ avec $\eta$ petit. On note $\underline{f}=-\rho\,g\,\underline{e}_z$ les forces extérieures de volume où $\rho$ est la masse volumique et $g$ la gravité. On néglige les forces visqueuses.
La tension superficielle est responsable d'une discontinuité entre la pression $p_f$ du fluide au niveau de sa surface libre et la pression $p_a$ de l'atmosphère. Ce saut de pression s'écrit $p_f-p_a=\sigma/R$, où $\sigma$ est une constante qui vaut $\sigma=0.07$ N m$^{-1}$ pour l'eau et $R$ le rayon de courbure de la surface libre dans le cas d'une déformation bidimensionnelle.

1) On admet sans démonstration que $R=-\left[1+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\right]^{3/2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^{-1}$. En déduire l'expression du saut de pression $p_f-p_a$ à l'ordre dominant du petit paramètre $\eta$.
2) On suppose que le champ de vitesse de l'écoulement s'écrit $\underline{U}=\underline{\text{grad}}\,\phi$ où $\phi(x,z,t)$ est une fonction du même ordre de grandeur que $\eta$. Justifier la relation $\Delta\phi=0$.
3) Justifier la condition aux limites $\lim_{z\to-\infty}\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,z,t)=0$ pour tout $x$ et tout $t$.
4) Justifier la relation $p=p_a-\rho\,g\,z-\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t}$.
5) Justifier la condition aux limites $\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial z}$ en $z=0$.
6) Exprimer la condition aux limites dynamique à en $z=0$ qui relie $\phi(x,0,t)$ et $\eta(x,t)$.
7) On cherche des solutions complexes sous la forme $\phi=\Phi(z)\,\exp(i\,k_x\,x-i\,\omega\,t)$. Justifier la forme $\Phi(z)=\Phi_m\,\exp(k\,z)$ où $\Phi_m$ est une amplitude complexe et $k=|k_x|$.
8) En déduire que la relation de dispersion s'écrit $\omega=\sqrt{(g+\gamma\,k^2)\,k}$ où $\gamma$ est une constante que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.
9) Tracer $\omega$ en fonction de $k$. Donner ses équivalents pour $k$ petit puis $k$ grand.
10) Tracer la vitesse de phase $c_p$ en fonction de $k$. Calculer sa valeur minimum $c_*$.
11) En-dessous de quelle longueur d'onde $\lambda_*$ la tension superficielle est-elle négligeable ? Donner sa valeur numérique en prenant $g=10$ m/s$^2$ et $\rho=10^3$ kg.m$^3$.