DETENTE ET COMPRESSION DE L'HELIUM :

Définitions :

détente de Joule-Thompson = détente isenthalpique

détente de Joule = détente à iso-énergie interne

On considère de l'hélium avec $M = 2\,g.mol^{-1}$, $C_v = 6240\,J.K^{-1}.kg^{-1} = C^{te}$

et $v = \frac{rT}{P} + b$ avec $b = C^{te}$ et $\frac{b}{v} \ll 1$

---

① on a $dh = C_p dT + (1 - \alpha T) v dP$ où $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ (cf. chap. IV)

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{v}\,\frac{r}{P} = \frac{r}{rT + bP}$$

On en déduit : $dh = C_p dT + \left(1 - \frac{rT}{Pv}\right) v dP = C_p dT + \left(\frac{Pv - rT}{P}\right) dP$

$$dh = C_p dT + b\,dP$$

---

② Relation de Mayer généralisée $C_p = C_v + \frac{\alpha^2 v T}{\chi_T}$ (cf. chap IV)

où $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$

d'où $\chi_T = -\frac{1}{v} \times -\frac{rT}{P^2} = \frac{rT}{P^2 v}$

On en déduit

$$C_p = C_v + \frac{r^2}{P^2 v^2} \times \frac{vT}{\frac{rT}{P^2 v}} = C_v + r$$

(on retrouve la relation de Mayer pour un gaz parfait)

On a donc $dh = \underbrace{(C_v + r)}_{C^{te}} dT + \underbrace{b}_{C^{te}} dP$

---

③ Détente de Joule-Thompson (isenthalpique)

$dh = 0 \iff dT = -\dfrac{b\,dP}{C_v + r} \implies \Delta T = -\dfrac{b}{C_v + r} \Delta P$

comme $\Delta P < 0$, on va avoir un réchauffement du fluide

A.N. $\begin{cases} b^* = 10\ cm^3.mol^{-1} = 10^{-5}\ m^3.mol^{-1} \implies b = \dfrac{b^*}{M} = 5.10^{-3}\ m^3.kg^{-1} \\ r = \dfrac{R}{M} = 4155\ J.kg^{-1}.K^{-1} \\ C_v = 6240\ J.kg^{-1}.K^{-1} \end{cases}$

$\implies \Delta T = 3{,}85\ K = 3{,}85\ °C$

---

④ $de = C_v dT - (1 - \beta T) P dv$ où $\beta = \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_v$

On a $P = \dfrac{rT}{v - b} \implies \beta = \dfrac{(v-b)}{rT} \times \dfrac{r}{v-b} = \dfrac{1}{T}$

On en déduit $de = C_v dT$

Pour une détente de Joule, on a $de = 0 \iff dT = 0$

On retrouve le même résultat que pour un gaz parfait avec un gaz non parfait.

(5) equation fondamentale $s = s(e, v)$

Gibbs : $de = Tds - Pdv \iff ds = \frac{de}{T} + \frac{P}{T}dv$

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + \frac{r}{v-b}dv = C_v \frac{de}{e} + r\frac{dv}{v-b}$$

On a donc : $s - s_0 = C_v \ln\left(\frac{e}{e_0}\right) + r \ln\left(\frac{v-b}{v_0 - b}\right)$

---

(6) Pour une évolution isentropique :

$$ds = 0 = C_v \frac{dT}{T} + r\frac{dv}{v-b} \implies T(v-b)^{r/C_v} = C^{te}$$

On a $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$ et $C_p = C_v + r \implies \frac{r}{C_v} = \gamma - 1$

On en déduit $T(v-b)^{\gamma-1} = C^{te}$

Comme $v - b = \frac{rT}{P} \implies T\left(\frac{rT}{P}\right)^{\gamma-1} = C^{te} \iff \frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = C^{te}$

$T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = C^{te}$

Remarque on peut aussi montrer que $P(v-b)^{\gamma} = C^{te}$

Pour un système ouvert, en régime permanent, pour lequel les flux d'énergies cinétique et potentielle sont négligeables, on a

$dh = \delta w + \delta q$ (1er principe pour une évolution quasi-statique)

Gibbs : $dh = Tds + vdP$

$Tds = \delta q + \delta \varphi = 0$ (évolution isentropique)

Si on suppose l'évolution réversible $\delta q = 0$

$$\Longrightarrow \quad dh = \delta w = v\,dP \iff w_{12} = \int_{P_1}^{P_2} v\,dP$$

$$w_{12} = \int_{P_1}^{P_2} (v-b)\,dP + \int_{P_1}^{P_2} b\,dP \quad \text{où} \quad P(v-b)^{\gamma} = P_1(v_1-b)^{\gamma}$$

$$w_{12} = (v_1-b)P_1^{1/\gamma} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P^{1/\gamma}} + b(P_2-P_1)$$

$$w_{12} = \frac{\gamma}{\gamma-1}(v_1-b)P_1^{1/\gamma}\left(P_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) + b(P_2-P_1)$$

On note $\tau = \frac{P_2}{P_1}$ le taux de compression

$$\Longrightarrow \quad w_{12} = \frac{\gamma}{\gamma-1}(v_1-b)P_1\left(\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) + bP_1(\tau-1)$$

$$w_{12} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,rT_1\left(\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) + bP_1(\tau-1)$$

---

7. $P_1 = 10\ \text{Bar} = 10^6\ \text{Pa}$
$T_1 = 20°C = 293\ K$, $\tau = 3$ et $\gamma = 1{,}666$

$$\Longrightarrow \quad w_{12} = 1{,}7\ 10^6\ J.kg^{-1}$$

$$\mathring{W}_{12} = \mathring{m}\, w_{12} = 4{,}16\ 10^6\ W$$

---

8) Evolution polytropique :

On a $\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{pol.} = n \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = n \times \frac{-rT}{(v-b)^2} = -\frac{nP}{(v-b)}$ (cf. cours)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dv}} = -\frac{nP}{(v-b)} \iff P(v-b)^n = C^{te}$$

sur la polytropique

On a donc $TP^{\frac{1-n}{n}} = C^{te}$ et $T(v-b)^{n-1} = C^{te}$

---

9)

$$\begin{cases} dh = \delta w & \text{(compression adiabatique)} \\ dh = \delta \varphi + \delta w \end{cases}$$

Compression reversible $(\delta \varphi = 0) \Longrightarrow \delta w = v\,dP$

Compression réelle $(\delta \varphi > 0) \Longrightarrow \delta w = v\,dP + \delta\varphi > v\,dP$

$$\eta_{isen} = \frac{\dot{W}_{isen}}{\dot{W}_{réel}} = \frac{w_{isen}}{w_{réel}} = \frac{bP_1(\tau - 1) + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) rT_1 \left(\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}{C_p(T_2 - T_1) + b(P_2 - P_1)} = 0{,}853$$

$$\eta_{pol} = \frac{bP_1(\tau - 1) + \frac{n}{n-1} rT_1 \left(\tau^{\frac{n-1}{n}} - 1\right)}{C_p(T_2 - T_1) + b(P_2 - P_1)}$$

Determination de n :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \Longrightarrow n = 1{,}83 \Longrightarrow \eta_{pol} = 0{,}883$$

Le rendement polytropique est le plus élevé (c'est donc celui affiché par les constructeurs).