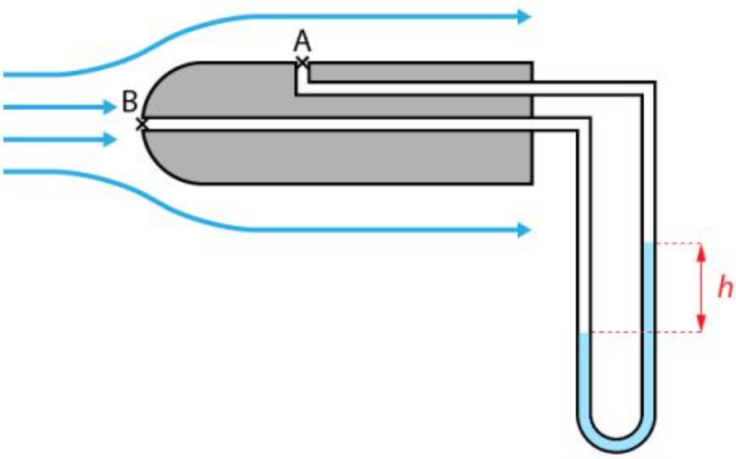
Département 3EA
$2^{ème}$
INP Toulouse – ENSEEIHT

Introduction à la mécanique des fluides
Olivier LIOT
24 avril 2024

Théorème de Bernoulli : activités et exercices

1 Sonde de Pitot

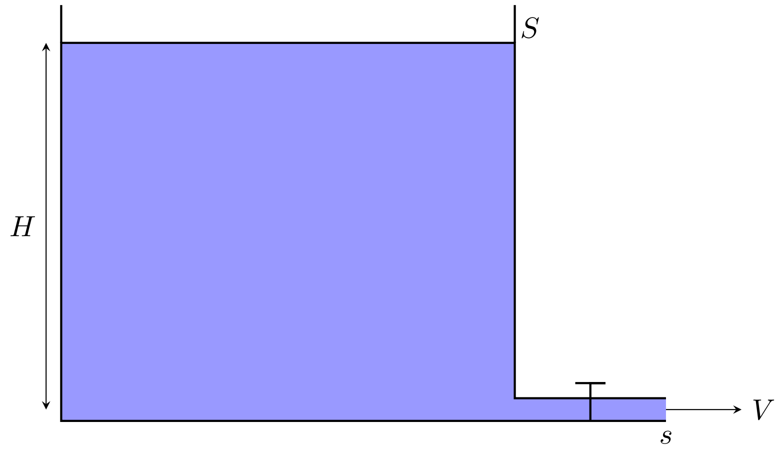
Le tube de Pitot (cf figure) permet de mesurer la vitesse d'un écoulement uniforme et stationnaire. Il est constitué d'un tube métallique de section $s \approx 5\,\text{mm}^2$ dont l'extrémité arrondie est percée d'un trou très fin de rayon $r \approx 0.5\,\text{mm}$. Le tube est placé longitudinalement à l'écoulement et on note u_∞ et P_∞, la vitesse et la pression loin en amont du tube. Le tube comporte une prise de pression latérale P_A et une prise de pression axiale P_B entre lesquelles un manomètre mesure la différence de pression $\Delta P = P_B - P_A$.



1. Justifier pourquoi la vitesse du fluide est nulle au niveau de la prise de pression axiale.
2. Établir l'expression de u_∞ en fonction de ΔP, et ρ.
3. En déduire la différence de hauteur h qui apparait entre les deux portions du tube.

2 Théorème de Torricelli

Un réservoir cylindrique (cf figure) de section S est rempli d'eau. A sa base, un tube de section $s \ll S$ fermé par un robinet permet la vidange du réservoir. Le robinet est ouvert à l'instant $t = 0$.

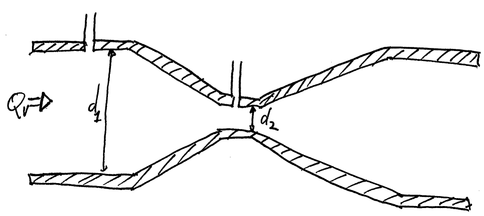


La formule de Torricelli permet de déterminer la vitesse de vidange du réservoir.

1. Quelle supposition peut-on faire quant à la vitesse de déplacement de la surface de l'eau dans le réservoir ?
2. Démontrer la formule de Torricelli qui relie la vitesse de sortie du fluide V à la hauteur de fluide H à partir du théorème de Bernoulli.
3. Montrer que la vitesse d'éjection est identique à celle d'un corps lâché en chute libre.

3 Mesure de débit par venturi

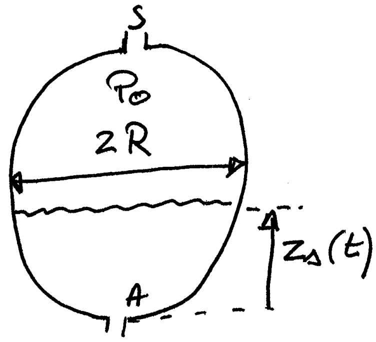
Un tube de Venturi est une conduite dont la section varie. Dans la première partie du tube, les sections vont en décroissant (zone convergente) ; dans la seconde partie, les sections vont en augmentant (zone divergente).



Un tube de Venturi est donc un "convergent-divergent" qui permet de mesurer un débit par mesure d'une différence de pression.

1. Le principe de l'appareil est basé sur la loi de Bernoulli, valable dans l'approximation de fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité. Retrouver l'expression du débit volumique Q_v en fonction de la différence de pression ΔP, des diamètres d_1 et d_2 et de la densité du fluide ρ.
2. Quelle est la sensibilité d'un tel dispositif de mesure de débit.

4 Clepsydre



1. Vidange d'un réservoir sphérique
Un réservoir de forme sphérique (cf figure) de rayon $R = 40cm$, est initialement rempli à moitié d'eau de masse volumique $\rho = 10^3 kg.m^{-3}$; la pression atmosphérique P_0 règne au dessus de la surface libre de l'eau grâce à une ouverture pratiquée au sommet S du réservoir.
On ouvre à l'instant $t = 0$ un orifice circulaire de faible section $s = 1cm^2$ au fond du réservoir.

- **(a)** Etablir l'équation différentielle en $z_S(t)$, z_S étant la hauteur d'eau dans le réservoir compté à partir de A.
- **(b)** Exprimer littéralement, puis calculer la durée T_S de vidange de ce réservoir.
- **(c)** Exprimer en fonction de T_S, le temps nécessaire t_s pour vider la moitié du liquide qui est initialement dans le réservoir.

2. Comparaison des vidanges des réservoirs sphérique et cylindrique.
La même quantité d'eau que celle placée initialement dans le réservoir sphérique est maintenant versée dans un récipient cylindrique de même rayon $R = 40cm$; la pression atmosphérique P_0 règne également au-dessus de la surface libre. A $t = 0$ on ouvre un orifice B de même section que A au fond du réservoir cylindrique.

- **(a)** Etablir la loi $zoo_C(t)$ ù z_C étant la hauteur d'eau dans le réservoir cylindrique compté à partir de B.
- **(b)** Exprimer littéralement la durée T_C de vidange, puis la durée t_c nécessaire pour vider la moitié du récipient cylindrique.
- **(c)** Comparer T_C et T_S d'une part, et t_c et t_s d'autre part. Conclure

3. Clepsydre
Soit un récipient (R_0) à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, dont la méridienne est donnée par l'équation $r = a\ z^n$, où r est le rayon du réservoir aux points de cote z comptée à partir de l'orifice C, de faible section ($s = 1cm^2$), percée au fond du réservoir.
Déterminer les coefficients constants n et a, donc la forme de R_0, pour que la cote du niveau d'eau placé dans R_0 baisse régulièrement de $6cm$ par minute au cours de la vidange.

N.B. On admettra que les veines liquides ont même section que l'orifice à la sortie des réservoirs (en réalité, leur section est un peu inférieure). On donne $g = 9.81ms^{-2}$. On supposera également que la vitesse de descente de la surface libre est toujours négligeable devant la vitesse du jet en sortie de réservoir.