Département 3EA
2ème
INP Toulouse – ENSEEIHT

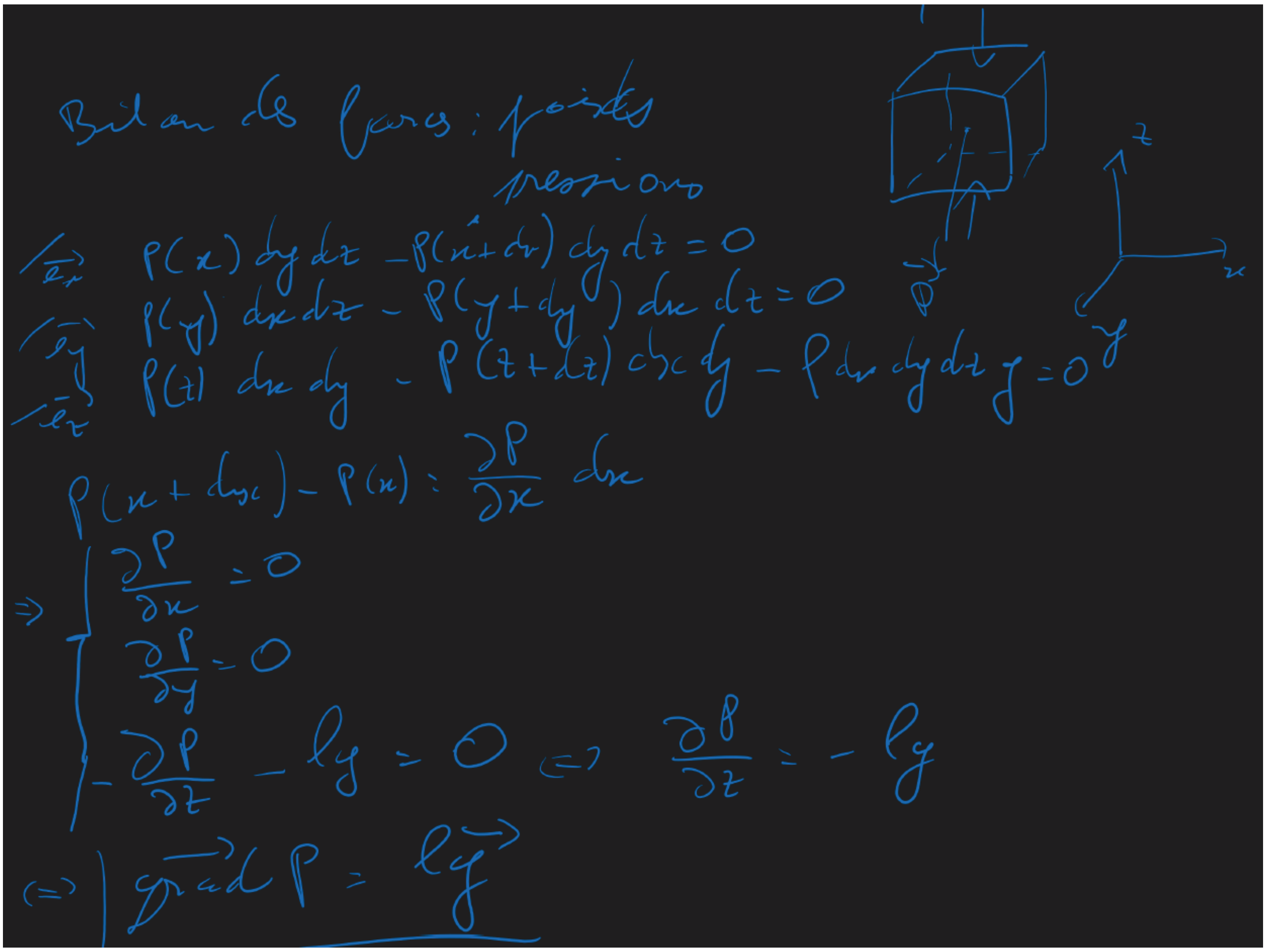
Introduction à la mécanique des fluides

Olivier LIOT

14 avril 2021

Statique des fluides : corrections

1 Loi fondamentale de la statique des fluides



2 Manomètre

Exo 2. Loi fondamentale de la statique

z

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \rho \vec{g}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\int_{z_r}^{z} dP = \int_{z_r}^{z} -\rho g \, dz$$

$$P(z) - P(z_r) = -\rho g (z - z_r)$$

$$P_{atm} - P_r = \rho g (z_r - z)$$

$$\Rightarrow P' = P_r - P_{atm} = \rho g (z - z_r)$$

→ conservation du volume.

↳ vol. chassé du réservoir : $V_r = S \times (z_0 - z_r)$

↳ " " "apparaît" ds le tube : $V_t = s \times (z - z_0)$

$$V_r = V_t \Rightarrow z_0 - z_r = \frac{s}{S}(z - z_0)$$

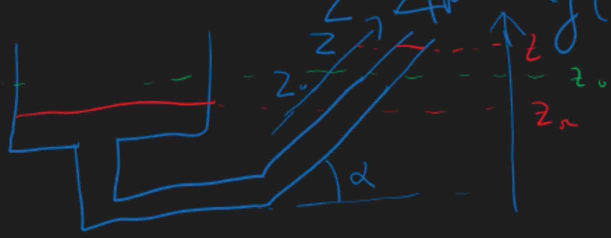
$$z_r = z_0 + \frac{s}{S}(z_0 - z)$$

$$\Rightarrow P' = \rho g \left(z - z_0 - \frac{s}{S}(z_0 - z)\right)$$

$$\boxed{P' = \rho g (z - z_0)\left(1 + \frac{s}{S}\right)}$$

2/ Sensibilité : $\dfrac{\Delta z}{\Delta p'} = \dfrac{\cancel{\Delta z}}{\rho g\left(1+\frac{s}{S}\right)\cancel{\Delta z}} = \dfrac{1}{\rho g\left(1+\frac{s}{S}\right)}$

3/



$$\sin\alpha = \frac{z - z_0}{Z - Z_0}$$

On a toujours $p' = \rho g\,(z - z_n)$

$\Rightarrow p' = \rho g\,(z - z_0 + z_0 - z_n)$

$= \rho g\,((Z - Z_0)\sin\alpha + z_0 - z_n)$

Conservation du volume

$S(z_0 - z_n) = s(Z - Z_0)$

$\Rightarrow p' = \rho g\,(Z - Z_0)\left[\sin\alpha + \frac{s}{S}\right]$

Sensibilité : $\dfrac{\Delta Z}{\Delta p'} = \dfrac{\cancel{\Delta Z}}{\rho g\left(\sin\alpha + \frac{s}{S}\right)\cancel{\Delta Z}} = \dfrac{1}{\rho g\left(\sin\alpha + \frac{s}{S}\right)}$

3 Manomètre différentiel

2 –

a) en considerant que l'interface est statique, la pression de part et d'autre de l'interface doit être identique.

Ainsi on a

$$P_0 + \rho_1 g H_1 = P_0 + \rho_2 g H_2$$

$$\longrightarrow \rho_1 H_1 = \rho_2 H_2$$

b) la pression augmente du côté 1, la surface de séparation des deux liquides baisse de Δh, la surface libre 1 baisse de $h_1 = \frac{s\,\Delta h}{S_1}$, celle du fluide 2 augmente de $h_2 = \frac{s\,\Delta h}{S_2}$

L'egalité des pression à l'interface donne

$$P_0 + \Delta P + \rho_1 g (H_1 - h_1 + \Delta h) = P_0 + \rho_2 g [H_2 + h_2 + \Delta h]$$

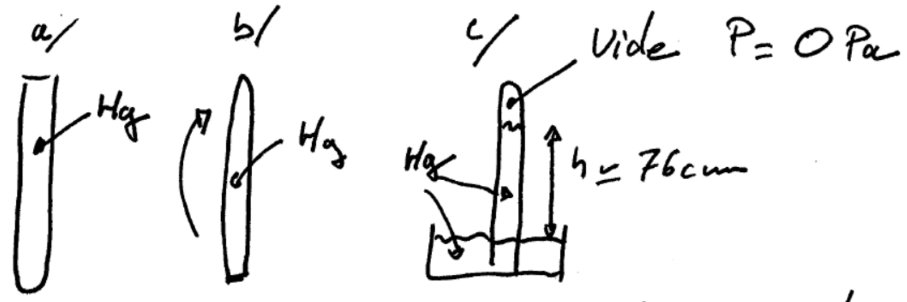
$$\Delta P = \rho_2 g (h_2 + \Delta h) - \rho_1 g (-h_1 + \Delta h)$$

$$= g \Delta h \left(\rho_2 - \rho_1 + s \left(\frac{\rho_1}{S_1} + \frac{\rho_2}{S_2} \right) \right)$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta P} = 2.2 \text{ mm/Pa}$$

4 Expérience de Torricelli

3-



à l'interface du "grand" récipient

$$P_{atm} = 0 + \rho_{Hg}\, g\, h$$

101325 Pa

$$h = \frac{P_{atm}}{\rho_{Hg}\, g} \simeq 0,762 \text{ m}$$

5 Tuba

1. **(a)** On ne peut pas appliquer la poussée d'Archimède car la demi-sphère est posée au fond du récipient (pression discontinue). Pour un point M à la surface de la sphère :

$$P(M) = P(O) - \rho g(z_M - z_O) = P(O) - \rho g a \cos\theta. \tag{1}$$

(b) L'axe Oz étant axe de symétrie du problème, les composantes horizontales des forces de pression se compensent et ne subsiste que la composante verticale portée par Oz. La force de pression exercée par le liquide en M est $d\vec{F}_M = -P(M)\cos\theta dS_M$.

(c) Il s'agit d'un rectangle de longueur $2\pi a\sin\theta$ et de largeur $ad\theta$. On a donc $dS = 2\pi a^2 d\theta$.

(d) On peut alors exprimer dF_z :

$$dF_z = -2\pi a^2(P(O) - a\rho g\cos\theta)\cos\theta\sin\theta. \tag{2}$$

On intègre pour avoir la force totale :

$$F_z = -2\pi a^2\int_0^{\pi/2}(P(O) - a\rho g\cos\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta = 2\pi a^2\left(\frac{a\rho g}{3} - \frac{P(O)}{2}\right). \tag{3}$$

2. **(a)** On utilise l'expression trouvée précédemment. On a $P(O) = P_0 + \rho g(h+a)$. Ainsi,

$$F_z = -2\pi a^2\left(\frac{P_0}{2} + \frac{\rho g h}{2} + \frac{\rho g a}{6}\right) = -32\,\text{N}. \tag{4}$$

(b) Avec uniquement la pression atmosphérique, la force serait $-\pi a^2 P_0$. Sous l'eau, cette force est plus importante en valeur absolue.