Département 3EA
$2^{ème}$
INP Toulouse – ENSEEIHT

Introduction à la mécanique des fluides
Olivier LIOT
14 avril 2021

Théorème d'Euler : corrections

1 Impact d'un jet

A venir après le cours

2 Rétrécissement d'une conduite

1. Qualitativement, la force s'applique de gauche à droite sur la conduite.

2. Par conservation du débit, on a $v = VS/s$.

3. On applique le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant centrale, on a alors :

$$\frac{\rho}{2}V^2 + P_1 = \frac{\rho}{2}v^2 + P_2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{\rho V^2}{2}\left(1 - \frac{S^2}{s^2}\right). \tag{1}$$

4. Si V est suffisamment grande, la pression P_2 devient nulle. On a alors apparition du phénomène de cavitation, dangereux pour la structure de la conduite. On a donc V_l pour $P_2 = 0$, soit :

$$V_l = \sqrt{\frac{2P_1}{\rho\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)}}. \tag{2}$$

Analyse numérique : $V_l = 12\,\mathrm{m/s}$.

5. On prend un volume de contrôle V_c à cheval sur le rétrécissement. A l'instant t on considère le système fermé constitué de V_c et du volume d'eau qui va rentrer dans V_c pendant dt, $\delta V = SVdt$. A $t + dt$, ce système est constitué de V_c et de ce qui en sort soit, par conservation du débit, $\delta V = svdt$. Comme on est en régime stationnaire, la variation de quantité de mouvement de V_c est nulle. La variation totale de quantité de mouvement provient alors seulement des éléments de volume qui entrent et sortent :

$$dp = \rho svdtv - \rho SVdtV \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \rho\left(SV^2 - sv^2\right). \tag{3}$$

Les forces qui s'exercent sur le fluide présent dans ce système fermé sont (en mettant de côté le poids et la réaction normale de la conduite sur le fluide) :

— la force de la conduite sur le fluide $\overrightarrow{F}_{cond \to fluide}$,
— les forces de pression de l'amont $P_1 S \overrightarrow{e_x}$,
— les forces de pression de l'aval $-P_2 s \overrightarrow{e_x}$.

On a alors :

$$\frac{dp}{dt}\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{F}_{cond \to fluide} + P_1 S \overrightarrow{e_x} - P_2 s \overrightarrow{e_x}. \tag{4}$$

Après quelques calculs on obtient alors :

$$\overrightarrow{F}_{fluide \to cond} = P_1 S \overrightarrow{e_x} - P_2 s \overrightarrow{e_x} - \rho \left(SV^2 - sv^2\right) \overrightarrow{e_x} = \left[P_1(S-s) - \frac{\rho V^2}{2s}(S-s)^2\right] \overrightarrow{e_x}. \tag{5}$$

6. Plus la vitesse est grande, à s, S et P_1 fixés, plus la force diminue. On vérifie que pour $V = V_l$,

$$\overrightarrow{F}_{fluide \to cond} = P_1 \frac{S}{S+s}(S-s)\overrightarrow{e_x}. \tag{6}$$

La force exercée par le fluide sur la conduite s'exerce donc toujours de la gauche vers la droite.

3 Division et déflexion d'un jet

1. **(a)** La gravité est négligée. La pression statique dans les trois composantes du jet sont identiques. En appliquant le théorème de Bernoulli on trouve immédiatement $v = v_1 = v_2$.

(b) On fait un bilan de quantité de mouvement dans un système Σ comprenant une part de chaque composante du jet. En régime stationnaire, la variation pendant dt de la quantité de mouvement du volume d'eau qui coïncide avec Σ à l'instant t s'écrit :

$$d\overrightarrow{p} = -dm\overrightarrow{v}dt + dm_1\overrightarrow{v_1}dt + dm_2\overrightarrow{v_2}dt \text{ avec } dm = dm_1 + dm_2 \tag{7}$$

Comme $v_1 = v_2 = v$, il faut $dm_1 = 3\,dm_2$ pour obtenir la condition souhaitée. On projette sur l'axe horizontal. Comme la viscosité est négligée, il n'y a pas de contrainte tangentielle de l'eau sur la plaque, donc on peut écrire :

$$0 = -dmv\cos\theta + dm_1 v_1 - dm_2 v_2 \Rightarrow -4\cos\theta + 3 - 1 = 0. \tag{8}$$

On a donc $\theta = 60^\circ$.

On a $Q = Q_1 + Q_2$ et $Q_1 = 3\,Q_2$. Comme on a $Q = vS = 60\,\mathrm{L/s}$, on a $Q_1 = 45\,\mathrm{L/s}$ et $Q_2 = 15\,\mathrm{L/s}$.

(c) On reprend l'équation bilan de quantité de mouvement. On projette cette fois sur l'axe vertical. La variation de quantité de mouvement est alors égale à la force exercée par la plaque sur le fluide. On a alors, pour la force exercée par le fluide sur la plaque :

$$\overrightarrow{F_1} = -\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = -\rho S v^2 \sin\theta \overrightarrow{e_z}. \tag{9}$$

L'application numérique donne $F_1 = 1560\,\mathrm{N}$.

2. **(a)** On fait de nouveau un bilan de quantité de mouvement, sachant que la vitesse (et donc le débit) est inchangée entre les deux portions de jet.

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = dm\overrightarrow{v'} - dm\overrightarrow{v}. \tag{10}$$

Suivant l'axe horizontal, on a alors une composante de la force qu'exerce le fluide sur la plaque qui s'exprime :

$$F_{2x} = -\overrightarrow{e_x} \cdot (-\rho S v \overrightarrow{v} + \rho S v' \overrightarrow{v'}) = \rho S v^2 (1 - \cos\alpha). \tag{11}$$

Suivant l'axe vertical on a :

$$F_{2y} = -\overrightarrow{e_z} \cdot (-\rho S v \overrightarrow{v} + \rho S v' \overrightarrow{v'}) = -\rho S v^2 \sin\alpha. \tag{12}$$

(b) La force $\overrightarrow{F_2}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{F_2} = \rho S v^2 \left((1 - \cos\alpha)\overrightarrow{e_x} - \sin\alpha \overrightarrow{e_z}\right). \tag{13}$$

L'analyse numérique donne $F_2 = 3118\,\mathrm{N}$. L'angle que fait la force avec l'horizontale vaut :

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\right) = -30^{\circ}. \tag{14}$$

4 Turbine hydraulique

-1-

Turbine

1- Bernoulli entre 1 et 2

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$V_1 = 0 \quad z_1 - z_2 = h$

Patm : statique fluide

$P_{atm}(z) = -\rho_a g z + cst$

$\hookrightarrow P_1 = P_{atm}(z_1) = \quad P_1 - P_2 = -\rho_a g h$
$P_2 = P_{atm}(z_2) =$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = -\frac{\rho_a}{\rho} h + h$$

$$V = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}$$

a) $V_2 = V = 133$ m/s

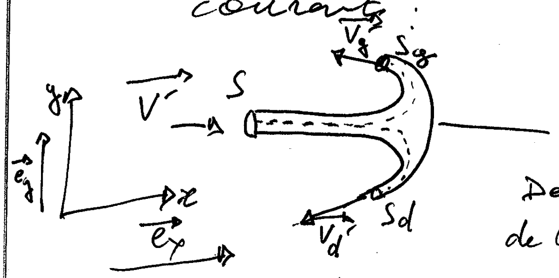
b) $Q_m = \rho V_2 S_2 = 1995$ kg/s

c) $P_c = \frac{1}{2} Q_m V^2 = 1\cancel{8}.5$ MW

2- Th Euler

$$\left.\begin{aligned} \sum F_{ext} &= \dot{m}\left(\vec{V_2} - \vec{V_1}\right) \\ &= \oint_S \rho \vec{V}\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right) ds \end{aligned}\right) \text{cf cours}$$

a- Si on néglige les différence de pression et
i) d'altitude on trouve en appliquant le théorème de Bernoulli sur 2 lignes de courant :



$$\frac{1}{2}V'^2 = \frac{1}{2}V_g'^2 = \frac{1}{2}V_d'^2$$

De plus la conservation de la masse donne :

$$q_m = \dot{m} = \rho V' S = \rho V_g' S_g + \rho V_d' S_d$$

et par symétrie $\rho V_g' S_g = \rho V_d' S_d = \frac{\dot{m}}{2}$

ii) Application du théorème de Bernoulli

$$\sum \vec{F}_{ext} = \oint_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds$$

$$\oint_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds = \rho \vec{V'}(\vec{V'}\cdot\vec{n})S + \rho\vec{V_g'}(\vec{V_g'}\cdot\vec{n_g})S_g + \rho\vec{V_d'}(\vec{V_d'}\cdot n_d)S_d$$

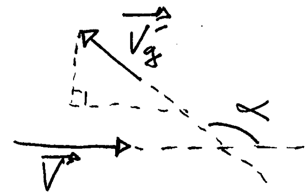
avec $\vec{V'}\cdot\vec{n} = -V'$

$\vec{V_g'}\cdot\vec{n_g} = V_g' = V'$

et $\vec{V_d'}\cdot\vec{n_d} = V_d' = V'$

$$\oint_S \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds = -\rho\vec{V'}\,V'S + \rho\vec{V_g'}\,V'S_g + \rho\vec{V_d'}\,V'S_d$$

$$= \frac{\dot{m}}{2}(\vec{V_g'} - \vec{V'}) + \frac{\dot{m}}{2}(\vec{V_d'} - \vec{V'})$$



$$\vec{V'} = V'\vec{e_x} + 0\,\vec{e_y}$$

$$\vec{V_g'} = V'\cos\alpha\,\vec{e_x} + V'\sin\alpha\,\vec{e_y}$$

$$\vec{V_d'} = V'\cos\alpha\,e_x - V'\sin\alpha\,\vec{e_y}$$

Bilan des Forces Exterieurs :

+ Action de la pression : resultante nulle car tout est à la pression Ambiante

+ Pesanteur - negligé

+ Action de la Paroi sur le fluide. $\vec{F}$

$$\vec{F} = \frac{\dot{m}}{2}\left[V'\cos\alpha\,\vec{e_x} + V'\sin\alpha\,\vec{e_y} - V'\vec{e_x}\right] +$$

$$+ \frac{\dot{m}}{2}\left[V'\cos\alpha\,\vec{e_x} - V'\sin\alpha\,\vec{e_y} - V'\vec{e_x}\right]$$

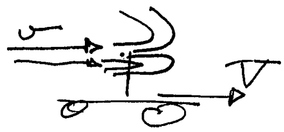
$\vec{F}$ uniquement la composante selon x qui est non nulle.

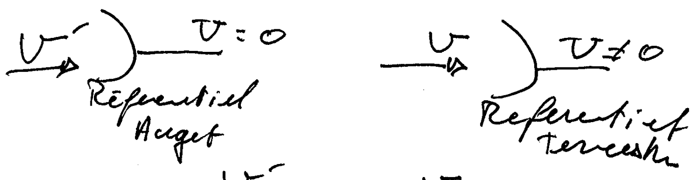
$$\vec{F} = \frac{2\dot{m}}{2}\left[V'\cos\alpha - V'\right]\vec{e_x} = F\vec{e_x}$$

$$F = \dot{m}\,V'(\cos\alpha - 1)$$

Dans le cas d'un Auget unique

$v' = v - V \quad ; \quad \dot{m} = \rho v' S$





$v' = 0 = v - V$

$$F = \rho S (v-V)^2 (\cos\alpha - 1)$$
$$= \rho S v \frac{(v-V)^2}{v} (\cos\alpha - 1)$$
$$= q_m \frac{(v-V)^2}{v} (\cos\alpha - 1)$$

* $|F_{max}|$ pour $\cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha = 180°$

* La puissance reçue par l'auget et
$$P = \vec{R} \cdot \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{R} = -\vec{F}$$
$$= q_m \frac{V}{v} (v-V)^2 (\cos\alpha - 1)$$

* la puissance disponible est la puissance du jet $P_c = q_m \frac{v^2}{2}$

$$\eta = \frac{P}{P_c} = \frac{2V}{v} \frac{(v-V)^2}{v^2} (\cos\alpha - 1)$$

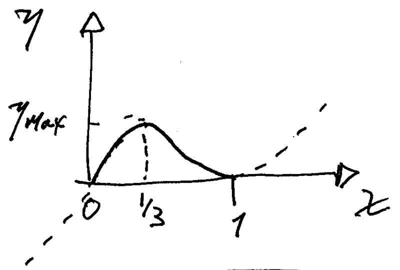
$$= 2x (1 + x^2 - 2x)(\cos\alpha - 1)$$ en posant $x = \frac{V}{v}$
$$= 2x (x-1)^2 (\cos\alpha - 1)$$

on cherche la vitesse donnant le meilleur rendement

$$\frac{d\eta}{dx} = 2(\cos\alpha - 1)(3x^2 - 4x + 1)$$

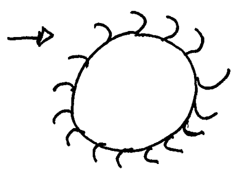
$$\frac{d\eta}{dx} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 4x + 1$$

$$\Delta = 4 \rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \times 3} \qquad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3}$$



Dans le cas de l'auget isolé Mobile le Rendement Max s'obtient pour $v = 3V$

Dans le cas de la Roue :



On considère qu'il y a une substitution continue d'augets. Ainsi la Force sur la Roue s'exprime

$$F = \dot m\, v'(\cos\alpha - 1)$$ ← Expression déjà trouvée précédemment

$$v' = v - V$$

$\dot m' = \dot m$ ← idem dans le référentiel terrestre et celui de la roue car il y a substitution continue

$$R = -F = \dot m (v - V)(1 - \cos\alpha)$$ toujours Max pour $\alpha = 180°$

$$P = \vec{R}\cdot\vec{V} = \dot m V(v - V)(1 - \cos\alpha)$$

$$\eta = \frac{P}{P_c} = \frac{\dot m V(v - V)(1 - \cos\alpha)}{\dot m\, v^2/2}$$

$$= 2(1-\cos\alpha)\frac{V}{v}\,\frac{v - V}{v}$$

$$= 2(1-\cos\alpha)\, x(1 - x) \quad \text{avec } x = \frac{V}{v}$$

on cherche la valeur de x pour avoir une dérivée nulle de η

$$\frac{d\eta}{dx} = 2(1-\cos\alpha)(1-2x)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

Le rendement est Maximum si la vitesse de deplacement de la roue est ~~or~~ $V = \frac{v}{2}$

VI) Pour $\alpha = 120°$ et $V = \frac{v}{2}$

$R = 2.10^5\ N$

$P = 13.2\ MW$

$\eta = 0.75 = \frac{1-\cos\alpha}{2}$