



DÉPARTEMENT 3EA

2^{ème}

INP Toulouse – ENSEEIHT

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

Olivier LIOT

14 avril 2021

Théorème de Bernoulli : corrections

1 Sonde de Pitot

Pitot
 $u_\infty \Rightarrow$ 

$V_B = 0$? point d'arrêt.

Bernoulli
 ↳ ligne de courant entre ∞ et B.

$$\frac{P_\infty}{\rho g} + \frac{u_\infty^2}{2g} + \cancel{z_\infty} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{\cancel{V_B^2}}{2g} + \cancel{z_B}$$

$z_B = z_\infty$
 $V_B = 0$

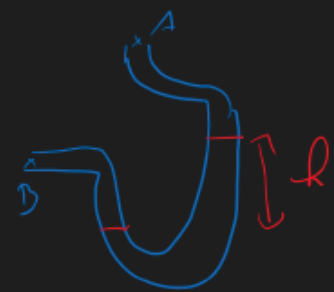
$$u_\infty^2 = \sqrt{2 \frac{P_B - P_\infty}{\rho}}$$

↳ ligne de courant de ∞ à A.

$V_A = u_\infty$
 $z_A = z_\infty$
 $\Rightarrow P_A = P_\infty$

$$\Rightarrow u_\infty^2 = \sqrt{2 \frac{P_B - P_A}{\rho}}$$

h? $P_B - P_A = \rho_{\text{eau}} g h$
 $\Rightarrow h = \frac{P_B - P_A}{\rho_{\text{eau}} g}$
 $\Rightarrow u_\infty = \sqrt{2 \frac{\rho_{\text{eau}} g h}{\rho}}$



→ Statique
 $\vec{p}_{\text{fluid}} = \rho g \vec{z}$
 $\int_A^B dP = \rho g \int_A^B dz$
 $P_B - P_A = \rho g \underbrace{(z_B - z_A)}_h$

2 Théorème de Torricelli

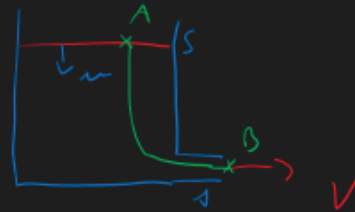
Torricelli

1/ Conservation du débit

$$uS = Vs$$

$$u = V \frac{s}{S} \quad \text{or} \quad \frac{s}{S} \ll 1$$

$$\Rightarrow u \ll V \Rightarrow u \text{ négligeable.}$$



2/ Bernoulli entre A et B

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z_B$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \sqrt{2gH}} \rightarrow \text{formule de Torricelli}$$

$$P_B = P_{\text{atm}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{jet à l'air libre} \end{array} \right)$$

$$P_A = P_{\text{atm}}$$

$$H = z_A - z_B$$

3/ Méca du point

RFD

$$m \ddot{x} = -mg$$

$$\dot{x} = -gt + v_0$$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

$$(v_0 = 0)$$

$$t_{\Delta x} \text{ pour parcourir } \Delta x = -x + x_0$$

$$t_{\Delta x} = \sqrt{\frac{2\Delta x}{g}}$$

$$\text{or } |\dot{x}| = \sqrt{2g\Delta x}$$

3 Mesure de débit par venturi

Venturi.

Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B$$

Conservation du débit : $S_A V_A = S_B V_B$

$$V_A^2 = \frac{2(P_B - P_A)}{\rho} + V_B^2$$

$$V_A^2 \left(1 - \left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2\right) = \frac{2(P_B - P_A)}{\rho}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2(P_B - P_A)}{\rho \left(1 - \left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2\right)}}$$

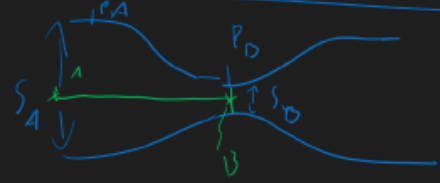
$$\Rightarrow Q_v = V_A S_A = \frac{\pi d_A^2}{4} \sqrt{\frac{2(P_B - P_A)}{\rho \left(1 - \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^4\right)}}$$

Sensibilité : si on mesure $\Delta P = P_A - P_B$

$$Q_v \propto \sqrt{\Delta P}$$

$$S = \frac{\delta Q_v}{\delta \Delta P} \quad \text{or} \quad \delta Q_v \propto \frac{\delta \Delta P}{2\sqrt{\Delta P}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha}{2\sqrt{\Delta P}}$$



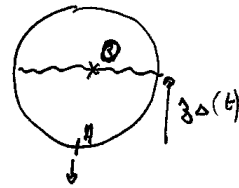
4 Clepsydre

14

S/

i) formule de Torricelli (cf Exo 3)

$$V_A(t) = \sqrt{2g z_A(t)}$$



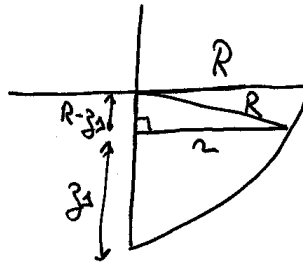
$$V_A(t) \Delta = V_D(t) S(z_A(t)) \quad \leftarrow \text{conservation du débit}$$

$$V_A = V_D \frac{S(z_A)}{\Delta}$$

un peu de géométrie

$$z = \sqrt{R^2 - (R - z_A)^2}$$

$$z = \sqrt{2Rz_A - z_A^2}$$



$$\text{et donc } S(z_A) = \pi z^2 = \pi (2Rz_A - z_A^2)$$

$$V_D = V_A \frac{\Delta}{S}$$

$$V_D = - \frac{dz_A}{dt} \quad (\text{par définition})$$

$$- \frac{dz_A}{dt} = \frac{\Delta \sqrt{2g}}{\pi} \frac{\sqrt{z_A}}{2Rz_A - z_A^2} = \frac{\Delta \sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{(2R - z_A) \sqrt{z_A}}$$

$$\frac{dz_A}{dt} = - \frac{\sqrt{2g} \Delta}{\pi} \frac{1}{(2R - z_A) \sqrt{z_A}}$$

ii) on peut séparer les variables

$$\frac{\sqrt{2g} \Delta}{\pi} dt = - (2R - z_A) \sqrt{z_A} dz_A \quad (2)$$

on intègre de $t=0$ à T_S

et $z=h$ à 0 (h = hauteur d'eau initiale)

$$\int_0^{T_S} \frac{\sqrt{2g} \Delta}{\pi} dt = - \int_h^0 (2R - z) \sqrt{z} dz$$

$$\frac{\sqrt{2g} \Delta T_S}{\pi} = - \int_h^0 2R \sqrt{z} dz + \int_h^0 z^{3/2} dz$$

$$= - \left[\frac{4}{3} R z^{3/2} \right]_h^0 + \left[\frac{2}{5} z^{5/2} \right]_h^0$$

$$= \frac{4}{3} R h^{3/2} - \frac{2}{5} h^{5/2}$$

$$T_S = \frac{\pi}{\sqrt{2g} \Delta} \left[\frac{4}{3} R h^{3/2} - \frac{2}{5} h^{5/2} \right]$$

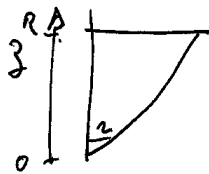
$\propto$ Relation uniquement valable pour $h \ll R$ (autrement la relation géométrique pour $S(z)$ n'est pas valable)

pour $h = R$:

$$T_S = \frac{\pi}{\sqrt{2g} \Delta} \frac{14}{15} R^{5/2}$$

pour $\Delta = 1 \text{ cm}^2$ et $R = 40 \text{ cm}$: $T_S = \frac{243.2 \Delta}{670 \Delta}$
 11 min 38 s

Pour trouver l'altitude $z_{1/2}$ correspondant à la 1/2 moitié du volume (et donc le quart de la sphère) on utilise la méthode d'Archimède.



$$\begin{aligned}
 V_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{3} \pi R^3 = \int_0^{z_{1/2}} \pi r(z)^2 dz \\
 &= \int_0^{z_{1/2}} \pi (2Rz - z^2) dz \\
 &= \pi \left(R z_{1/2}^2 - \frac{z_{1/2}^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow R^3 + z_{1/2}^3 = 3R z_{1/2}^2$$

$$\text{en posant } R z^* = z_{1/2} \rightarrow 1 + z^{*3} = 3z^{*2}$$

pour $z^* \in [0; 1]$ la seule racine est: $z^* = 0.6257$

$$z_{1/2} = 0.6257 R$$

on intègre l'équation ①

de $t = 0 \rightarrow t_\Delta$ et $z_0 = h = R \rightarrow z_{1/2}$

$$\hookrightarrow \frac{\sqrt{2g\Delta}}{\pi} t_\Delta = \frac{4}{3} R h^{3/2} - \frac{2}{5} h^{5/2} - \frac{4}{3} R z_{1/2}^{3/2} + \frac{2}{5} z_{1/2}^{5/2}$$

et en posant $h = R$ et avec $h > z_{1/2}$

$$\frac{\sqrt{2g\Delta}}{\pi} t_\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{2g\Delta}} \left(\frac{14}{15} R^{5/2} - \frac{\pi}{\sqrt{2g\Delta}} \left(\frac{4}{3} R^{3/2} - \frac{2}{5} z_{1/2}^{5/2} \right) \right)$$

$$t_\Delta = T_S - \frac{\pi}{\sqrt{2g\Delta}} \left(\frac{4}{3} R^{3/2} - \frac{2}{5} R^{5/2} \cdot 0.6257^{5/2} \right)$$

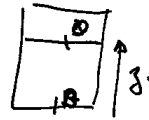
$$\begin{aligned}
 t_\Delta &= T_S - \frac{\pi}{\sqrt{2g\Delta}} R^{5/2} \left[\frac{4}{3} 0.6257^{3/2} - \frac{2}{5} 0.6257^{5/2} \right] \times \frac{15}{14} \times \frac{14}{15} \\
 &= \cancel{0.5743} \quad 0.5743
 \end{aligned}$$

$$t_A = T_S (1 - 0.5743)$$

17

$$\hookrightarrow \frac{t_A}{T_S} = 0.426$$

b) Reservoir cylindrique



i

$$V_B(t) = \sqrt{2g z_c(t)}$$

$$V_0 = - \frac{dz_c}{dt} = \frac{\Delta}{S_0} V_B$$

$$\frac{dz_c}{dt} = \frac{\Delta \sqrt{2g}}{\pi R^2} \sqrt{z_c(t)} \rightarrow z_c(t) = \left(\sqrt{\frac{2R^3}{3}} - \frac{\Delta \sqrt{2g}}{2\pi R^2} t \right)^2$$

la hauteur initiale h : $\pi R^2 h = \frac{2}{3} \pi R^3$

ii

$$\int_{\frac{2}{3}R}^0 z_c^{-1/2} dz_c = - \int_0^{T_c} \frac{\Delta \sqrt{2g}}{\pi R^2} dt \quad h = \frac{2}{3}R$$

$$-2 \left(\frac{2}{3}R \right)^{1/2} = \frac{\Delta \sqrt{2g} T_c}{\pi R^2} \Rightarrow T_c = \frac{2\pi R^{3/2}}{\Delta \sqrt{3g}}$$

$$T_c = 1172 \text{ s}$$

soit 19 min 32 s

pour t_c :

$$\int_{\frac{2}{3}R}^0 z_c^{-1/2} dz_c = - \int_0^{t_c} \frac{\Delta \sqrt{2g}}{\pi R^2} dt$$

$$2\sqrt{\frac{R^3}{3}} - 2\sqrt{\frac{2R^3}{3}} = - \frac{\Delta \sqrt{2g} t_c}{\pi R^2} \Rightarrow t_c = T_c \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{0.414}$$

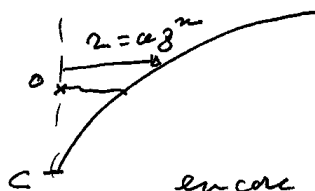
ii) c)	sphère	cylindre
1	670 s	1172 s
$\frac{1}{2}$	281 s	485 s

$$\frac{T_S}{T_C} = \frac{\frac{14}{15} \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \Delta}{\frac{2\pi R^{5/2}}{\Delta \sqrt{3g}}} R^{5/2} = \frac{14}{15} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0.571$$

$$\frac{t_S}{t_C} = \frac{T_S 0.426}{T_C 0.414} = 0.588$$

Une forme sphérique vidange plus rapidement
un même volume qu'une forme cylindrique ~~car~~
car la hauteur initiale (et donc la vitesse) est
plus basse dans le cylindre, de plus dans la sphère
la plus grande partie du volume est "en haut"
est donc se vidange rapidement.

c) $z \uparrow$



$$V_C = \sqrt{2g} z$$

$$V_0 \pi r(z)^2 = V_C \Delta$$

encore une fois on a :

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{2g} z}{\pi r^2 z^{2m}} \Delta = \frac{\sqrt{2g} \Delta}{\pi} z^{-2m} z^{\frac{1}{2}-2m}$$

on veut $\frac{dz}{dt} = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{60} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

on veut que la vitesse de la surface
libre soit constante (donc indépendant de z) 19

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 2n = 0$$

$$\hookrightarrow n = \frac{1}{4}$$

$$a^{-2} = \frac{dz}{dt} \frac{\pi}{\sqrt{g} \Delta}$$

$$a = \left(\frac{dz}{dt} \frac{\pi}{\sqrt{g} \Delta} \right)^{-1/2} = 0.375$$

$$\text{soit } 0.375 z^{1/4}$$