

## Transformations modèles : compressions, détente

Transformation polytropique : transformation dans laquelle  
on peut considérer que  $C$  est constante :  $C = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}$

Si la transformation est réversible :  $C = \frac{T}{m} \frac{dS}{dT}$

Sur une polytropique : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_V + \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC_V}{T} + \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC}{T} \\ \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_P + \frac{\partial S}{\partial P} \Big|_T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC_P}{T} + \frac{\partial S}{\partial P} \Big|_T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC}{T} \end{array} \right.$$

## Transformations modèles : compressions, détente

Transformation polytropique : transformation dans laquelle on peut considérer que C est constante :

$$C = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}$$

Si la transformation est réversible :  $C = \frac{T}{m} \frac{dS}{dT}$

Sur une polytropique :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{pol.} = \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_V + \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC_V}{T} + \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC}{T} \\ \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_P + \frac{\partial S}{\partial P} \Big|_T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC_P}{T} + \frac{\partial S}{\partial P} \Big|_T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_{pol.} = \frac{mC}{T} \end{cases}$$

On définit l'exposant polytropique :

$$n = \frac{C - C_P}{C - C_V} = \frac{\frac{\partial S}{\partial P} \Big|_T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_{pol.}}{\frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_{pol.}} = \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T \frac{\partial P}{\partial V} \Big|_{pol.} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial V} \Big|_{pol.} = n \frac{\partial P}{\partial V} \Big|_T = -\frac{n}{V \chi_T} \quad \chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T$$

Le travail utile pour un système ouvert :  $dw = v dP = -\frac{n}{\chi_T} dv$

• Transformations polytropiques réversibles :

$$n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$$

• Isentropique  $dS = 0$   $C = \frac{T dS}{m dT}$   $\rightarrow C = 0$  et  $n = C_P/C_V = \gamma$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_S = \gamma \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T = -\frac{\gamma}{V \chi_T}$$

$$dw = -\frac{\gamma}{\chi_T} dv$$

Travail utile  
pour un  
système  
ouvert

• Isotherme réversible  $dT=0$   $\rightarrow C \rightarrow \infty$   $n = 1$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{pol.} = \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T$$

$$dw = -\frac{dv}{\chi_T}$$

• Isochore réversible  $dV=0$   $\rightarrow C = C_V$  et  $n \rightarrow \infty$

$$dw = v dP \Rightarrow w = v(P_f - P_i)$$

• Isobare réversible  $dP=0$   $\rightarrow C = C_P$  et  $n \rightarrow 0$

$$dw = 0$$

## Evolution polytropicque réversible d'un gaz parfait

- Loi de Boyle Mariotte

$$Pv = rT \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{\partial P}{\partial v} \right|_T = -\frac{rT}{v^2} = -\frac{P}{v}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{pol.} = n \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T = -\frac{n}{V\chi_T} \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{\partial P}{\partial v} \right|_{pol.} = -n\frac{P}{v} \Leftrightarrow Pv^n = C^{te} \quad \longrightarrow \quad PV^n = C^{te} \Leftrightarrow \frac{T}{P^{\frac{n-1}{n}}} = C^{te}$$

# Evolution polytropique réversible d'un gaz parfait

• Loi de Boyle Mariotte  $Pv = rT \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{\partial P}{\partial v} \right|_T = -\frac{rT}{v^2} = -\frac{P}{v}$

$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{pol.} = n \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T = -\frac{n}{V} \chi_T \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{\partial P}{\partial v} \right|_{pol.} = -n \frac{P}{v} \Leftrightarrow Pv^n = C^{te} \quad \longrightarrow \quad PV^n = C^{te} \Leftrightarrow \frac{T}{P^{\frac{n-1}{n}}} = C^{te}$

• Travail pour un système fermé  $\delta W = -PdV$

$W_{AB} = -P_A V_A^n \left[ \frac{1}{1-n} V^{1-n} \right]_A^B = \frac{P_A V_A}{n-1} \left( \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{n-1} - 1 \right) \xrightarrow{\text{Pour un GP}} W_{AB} = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{n-1} = \frac{mr}{n-1} (T_B - T_A)$

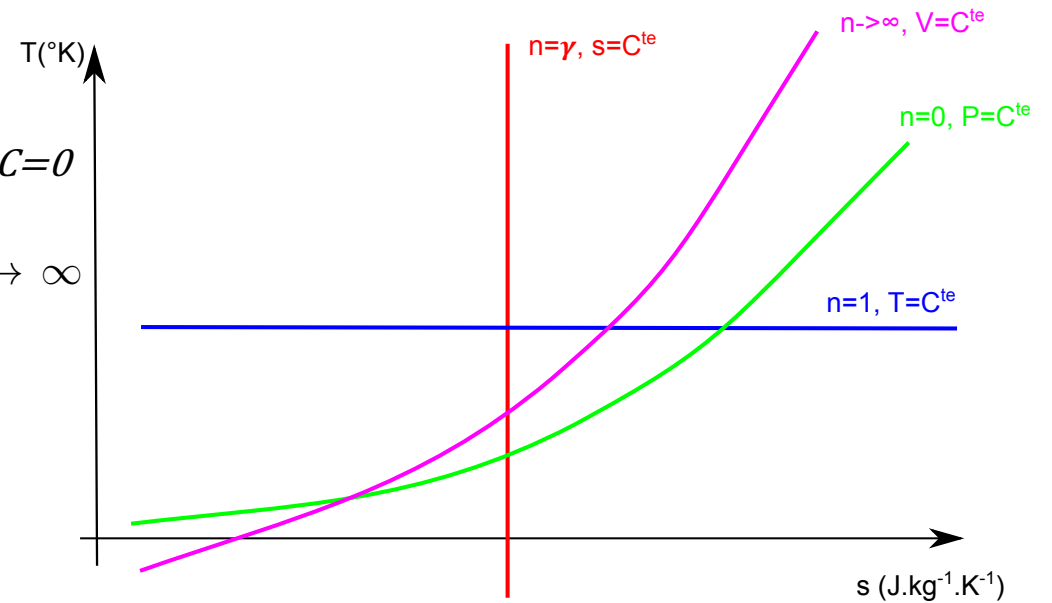
• Travail pour un système ouvert  $\delta W = -VdP$

$W_{AB} = V_A P_A^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{n}{n-1} P^{\frac{n-1}{n}} \right]_A^B = \frac{n}{n-1} V_A P_A \left( \left( \frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) \longrightarrow W_{AB} = \frac{m n}{n-1} r T_A \left( \tau^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) = \frac{m n}{n-1} r (T_B - T_A)$

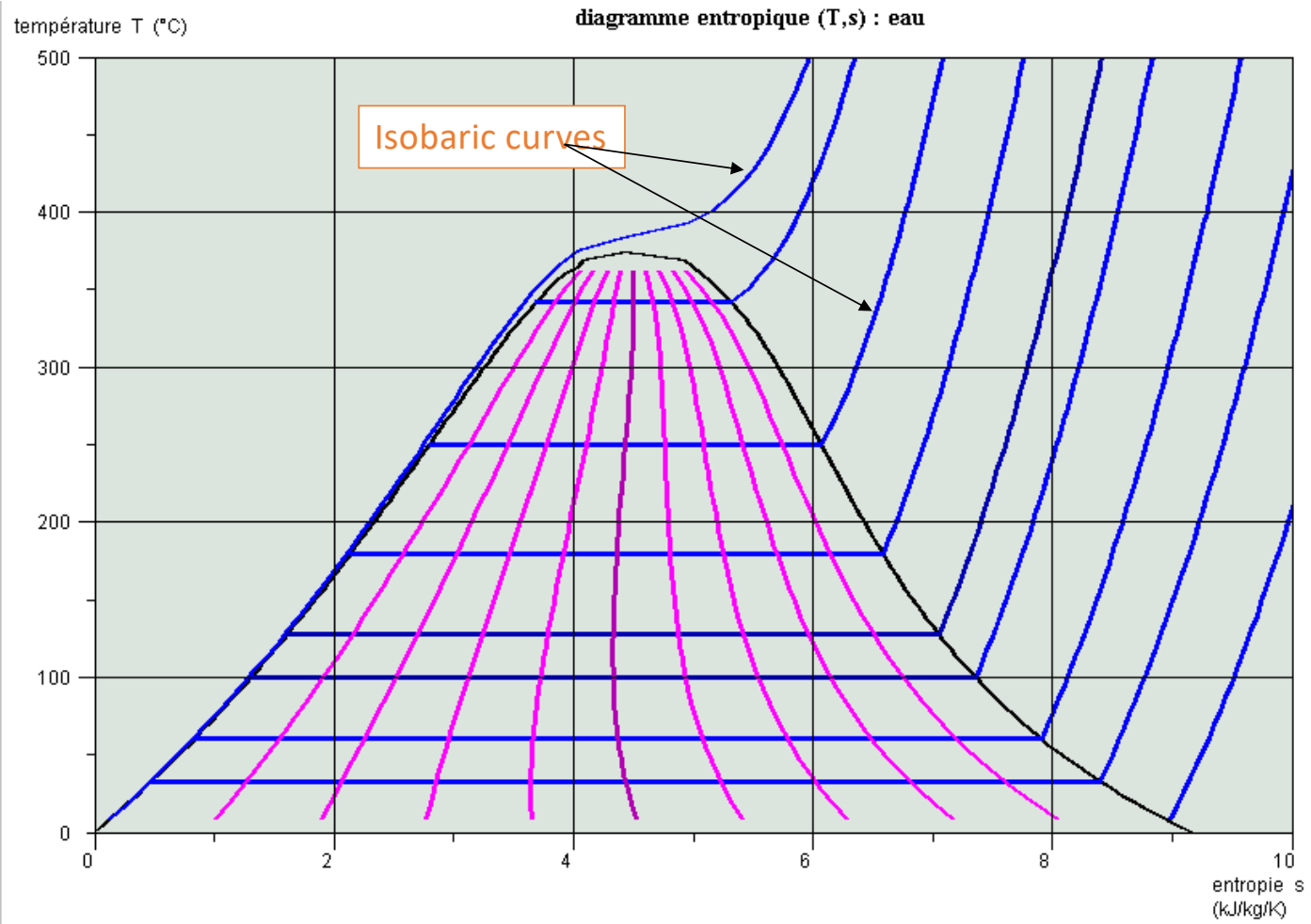
# Représentation des transformations dans les diagrammes

$$C = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{T}{m} \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{pol.} \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_{pol.} = \frac{T}{C} \quad n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$$

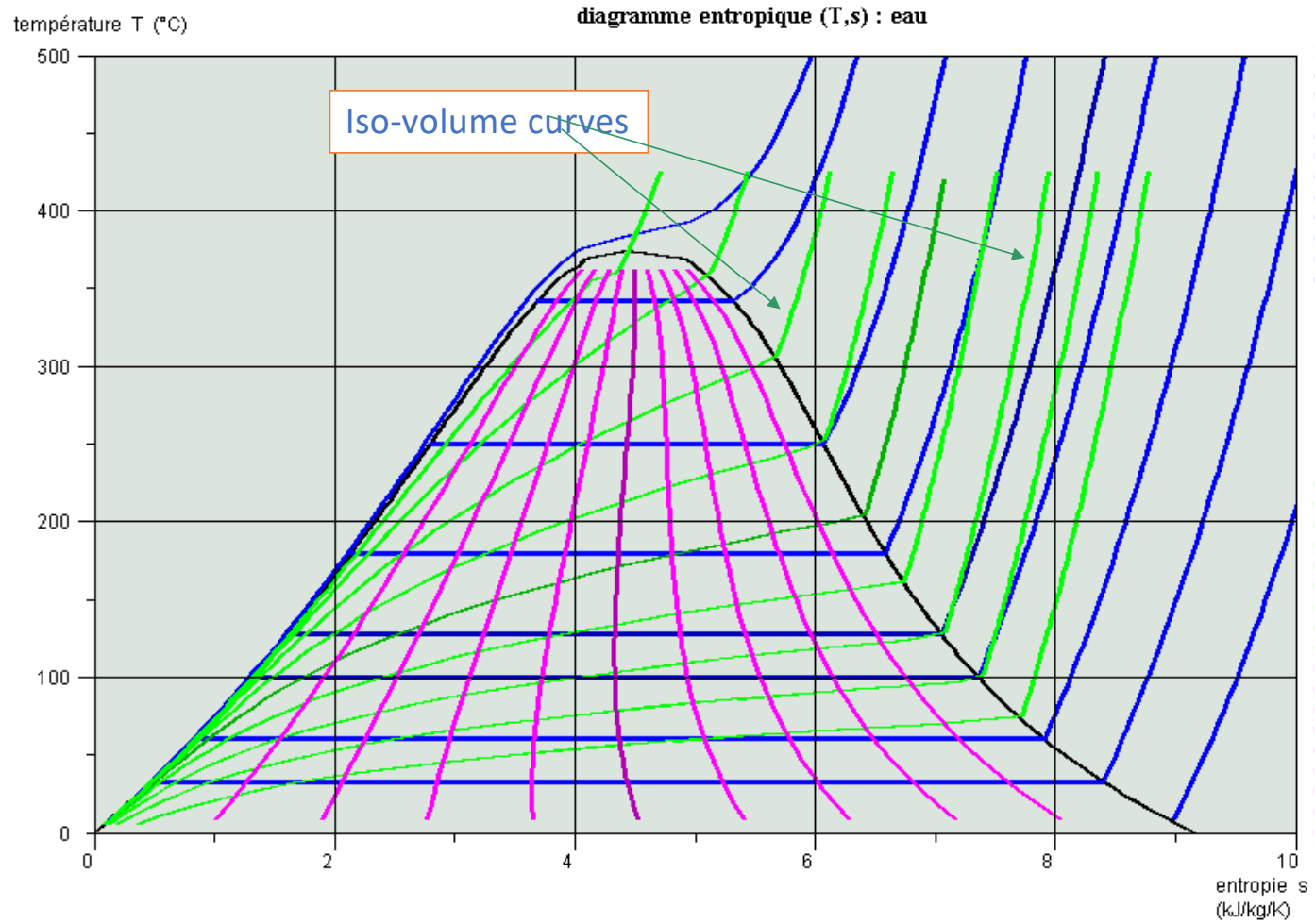
- pour une isentropique  $n = \gamma$  et la pente est infinie,  $C=0$
- pour une isotherme  $n = 1$  et la pente est nulle,  $C \rightarrow \infty$
- pour une isobare  $n = 0$  et la pente  $\left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_P = \frac{T}{C_P}$ ,
- pour une isochore  $n \rightarrow \infty$  et la pente  $\left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_V = \frac{T}{C_V}$ .



# Entropic diagram (T,s) for water

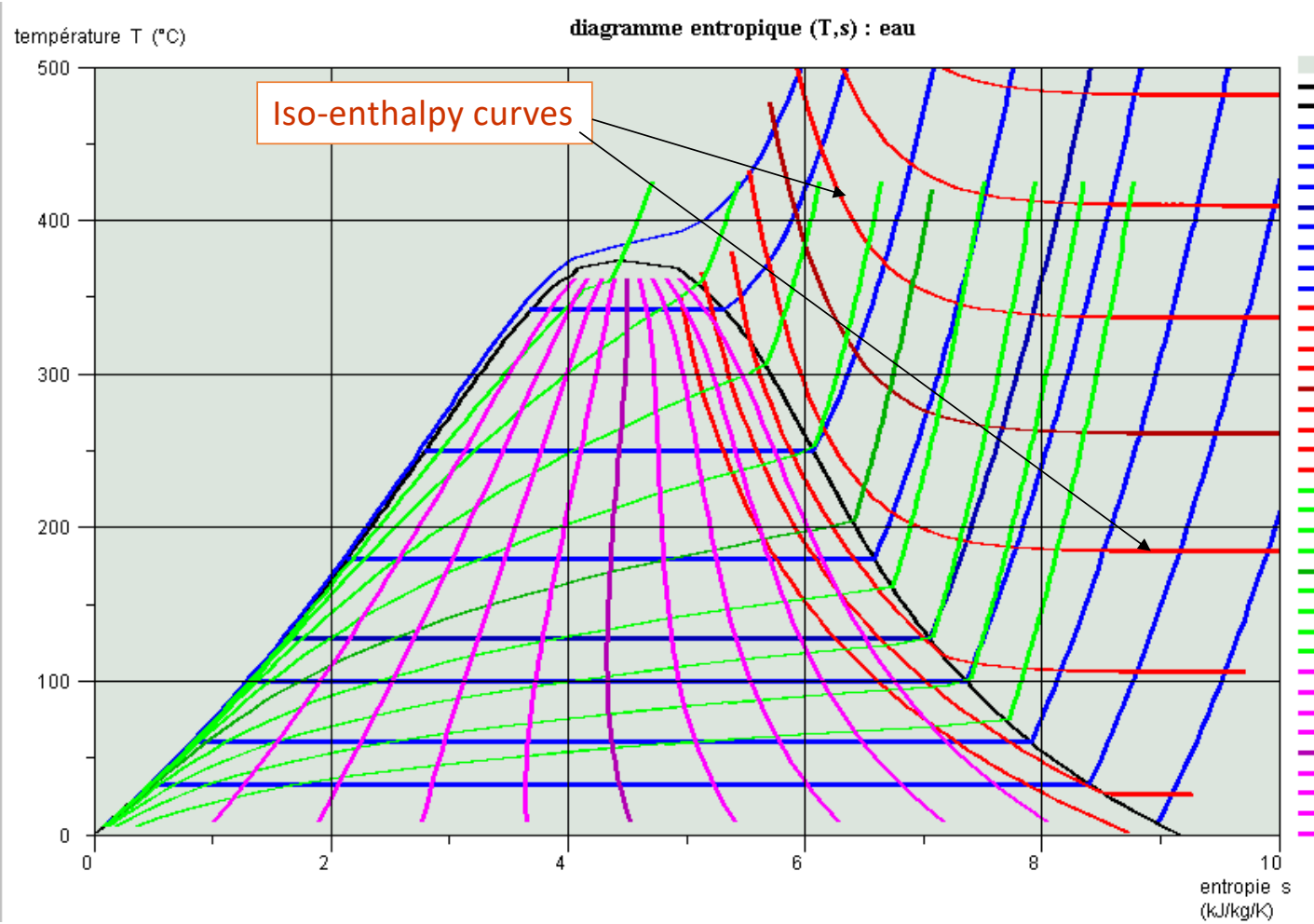


# Entropic diagram (T,s) for water





# Entropic diagram (T,s) for water



## Rendements

Pour un système ouvert en régime permanent :

$$\dot{m} (h_B - h_A) = \dot{m} (q_{AB} + w_{AB}) \Rightarrow w_{AB} = h_B - h_A - q_{AB}$$

$$dh = Tds + vdP = Tds_i + T\delta q + vdP \Rightarrow w_{AB} = \int_A^B Tds_i + \int_A^B vdP$$

Pour une compression, le travail est minimal pour une transformation réversible.

On définit le rendement d'une compression comme le rapport entre le travail utile pour l'évolution réversible et le travail de la compression réelle.

Rendement isentropique :  $\eta_S = \frac{w_S}{w}$   $w_S = \frac{\gamma}{\gamma-1} r T_A \left( \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} r (T_B - T_A)$

Rendement isotherme :  $\eta_T = \frac{w_T}{w}$   $w_T = \int_A^B vdP = \int_A^B \frac{P_A v_A}{P} dP = P_A v_A \ln(\tau)$

Rendement polytropique :  $\eta_p = \frac{w_p}{w}$

Pour une détente le travail maximal récupérable sera pour une transformation réversible

$$\eta_S = \frac{w}{w_S}, \quad \eta_T = \frac{w}{w_T} \quad \text{et} \quad \eta_p = \frac{w}{w_P}$$

### **Exercice 1 : Etude d'un compresseur**

De l'air ( $\gamma=1,4$ ) entre dans un compresseur à une pression de 1 bar et une température de 400 K. Le taux de compression est de 4. Le rendement isentropique du compresseur est de 80%. Le débit massique d'air est de 10 kg/s.

Calculer la température en sortie de compresseur et la puissance fournie par le compresseur.

### **Exercice 2 : Compression polytropique**

On mesure à l'entrée d'un compresseur d'air  $P_1 = 0,1$  MPa,  $T_1 = 25^\circ\text{C}$ , et à la sortie  $P_2 = 0,5$  MPa,  $T_2 = 75^\circ\text{C}$ . Calculer l'exposant polytropique de cette compression refroidie, et le travail polytropique. En assimilant la compression réelle à une compression polytropique, calculer le rendement isotherme, avec  $r = R/M = 287$  J/kg/K.