

## Deuxième partie

### TLA<sup>+</sup> – les actions



# Objectifs

## Décrire des systèmes de transition

- en intention
- de manière abstraite

Le formalisme de description doit être

- aussi naturel que possible (= proche d'un langage de programmation)
- parfaitement rigoureux (pas d'ambiguïté ou de sémantique approximative)
- complet (tout système de transition est descriptible)
- minimaliste dans les concepts (pour axiomatiser)
- extensible (pour décrire des concepts dérivés)

→ variables, ensembles et fonctions, actions de transition



# TLA<sup>+</sup> : Temporal Logic of Actions

## TLA<sup>+</sup> : Temporal Logic of Actions

- Un langage outillé pour modéliser les programmes et systèmes
- Particulièrement adapté aux programmes et systèmes distribués / concurrents
- Basé sur les systèmes de transition
- Une toolbox embarquant un éditeur de texte, un outil de vérification de modèles (TLC) et pour visualiser les exécutions, un outil pour écrire et vérifier des preuves (TLAPS)
- <http://lamport.azurewebsites.net/tla/tla.html>



# Plan

- 1 Spécification
  - Structure
  - Constantes
  - Expressions
- 2 Actions
- 3 Fonctions
  - Fonctions de  $X$  dans  $Y$
  - Les enregistrements (records)
  - Tuples & séquences
  - Définition récursive
- 4 Divers



# Structure d'une spécification

Un « programme » = une **spécification** de système de transition =

- des constantes
- des variables (états = valuation des variables)
- un ensemble d'états initiaux défini par un prédicat d'état
- des actions = prédicat de transition reliant deux états :
  - l'état courant, variables non primées
  - l'état d'arrivée, variables primées
- un prédicat de transition construit par disjonction des actions  
( $\approx$  actions répétées infiniment)



# Exemple

MODULE *exemple1*

EXTENDS *Naturals*

VARIABLE  $x$

États initiaux

$Init \triangleq x \in 0 .. 2$  équivalent à  $x \in Nat \wedge 0 \leq x \wedge x < 3$

Actions

$Plus \triangleq x' = x + 1$

$Moins \triangleq x > 0 \wedge x' = x - 1$

$Next \triangleq Plus \vee Moins$

$Spec \triangleq Init \wedge \square[Next]_{\langle x \rangle}$

# Exemple

Correspond au système de transition :

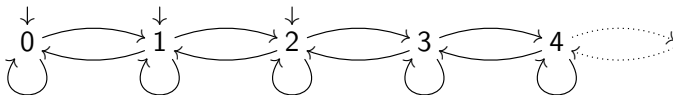
$$V \triangleq x \in \mathbb{N}$$

$$I \triangleq 0 \leq x \leq 2$$

$$R \triangleq x' = x + 1$$

$$\vee x > 0 \wedge x' = x - 1$$

$$\vee x' = x$$



# Constantes

- Constantes explicites : 0, 1, TRUE, FALSE, “toto”
- Constantes nommées : `CONSTANT N`  
généralement accompagnées de propriétés :  
`ASSUME N ∈ Nat ∧ N ≥ 2`





# Expressions autorisées

Tout ce qui est axiomatisable :

- expressions logiques :  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\forall x \in S : p(x)$ ,  
 $\exists x \in S : p(x)$ ...
- expressions arithmétiques :  $+$ ,  $-$ ,  $>$  ...
- expressions ensemblistes :  $\in$ ,  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\subset$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $n..m$ ,  
 $\{x \in S : p(x)\}$ ,  $\{f(x) : x \in S\}$ , UNION  $S$ , SUBSET  $S$
- IF *pred* THEN  $e_1$  ELSE  $e_2$
- fonctions de  $X$  dans  $Y$
- tuples, séquences, ...



# Opérateurs ensemblistes

$\{e_1, \dots, e_n\}$	ensemble en extension
$n..m$	$\{i \in \text{Nat} : n \leq i \leq m\}$
$\{x \in S : p(x)\}$	l'ensemble des éléments de $S$ vérifiant la propriété $p$ $\{n \in 1..10 : n \% 2 = 0\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\{n \in \text{Nat} : n \% 2 = 1\} =$ les entiers impairs
$\{f(x) : x \in S\}$	l'ensemble des valeurs de l'opérateur $f$ en $S$ $\{2 * n : n \in 1..5\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\{2 * n + 1 : n \in \text{Nat}\} =$ les entiers impairs
UNION $S$	l'union des éléments de $S$ UNION $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\} = \{1, 2, 3, 4\}$
SUBSET $S$	l'ensemble des sous-ensembles de $S$ SUBSET $\{1, 2\} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$



# Plan

- 1 Spécification
  - Structure
  - Constantes
  - Expressions
- 2 **Actions**
- 3 Fonctions
  - Fonctions de  $X$  dans  $Y$
  - Les enregistrements (records)
  - Tuples & séquences
  - Définition récursive
- 4 Divers



# Actions

## Action

Action = prédicat de transition = expression booléenne contenant des constantes, des variables et des variables primées.

Une action n'est pas une affectation.

$$\begin{aligned}
 & x \in \mathit{Nat} \wedge x' = x + 1 \\
 \equiv & x \in \mathit{Nat} \wedge x' - x = 1 \\
 \equiv & x \in \mathit{Nat} \wedge x = x' - 1 \\
 \equiv & x \in \mathit{Nat} \wedge ((x > 1 \wedge x'/x = 1 \wedge x' \% x = 1) \vee (1 = x \wedge 2 = x') \\
 & \vee (x = 0 \wedge x' \in \{y \in \mathit{Nat} : y + 1 = 2 * y\}))
 \end{aligned}$$

Autres exemples d'actions :

- $x' > x$  ou  $x' \in \{x + 1, x + 2, x + 3\}$  (non déterministe)
- $x' \in \{y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} : z * y = x \wedge z \% 2 = 0\}$  (non évaluable)
- $x' = y \wedge y' = x$  (plusieurs variables)

# Action gardée

## Action gardée

Action constituée d'une conjonction :

- 1 un prédicat d'état portant uniquement sur l'état de départ
- 2 un prédicat de transition déterministe  $var' = \dots$   
ou un prédicat de transition non déterministe  $var' \in \dots$

Se rapproche d'une instruction exécutable.

$$x < 10 \wedge x' = x + 1$$

plutôt que  $x' = x + 1 \wedge x' < 11$

ou  $x' - x = 1 \wedge x' < 11$



## Bégalement

## Bégalement

$[\mathcal{A}]_f \triangleq \mathcal{A} \vee f' = f$ , où  $f$  est un tuple de variables.

exemple :  $[x' = x + 1]_{\langle x, y \rangle} = (x' = x + 1 \vee (\langle x, y \rangle' = \langle x, y \rangle))$   
 $= (x' = x + 1 \vee (x' = x \wedge y' = y))$

## Non bégalement

$\langle \mathcal{A} \rangle_f \triangleq \mathcal{A} \wedge f' \neq f$

## Variables non contraintes

$(x' = x + 1) = (x' = x + 1 \wedge y' = \text{n'importe quoi})$   
 $\neq (x' = x + 1 \wedge y' = y)$

## UNCHANGED

UNCHANGED  $e \triangleq e' = e$

EXTENDS *Naturals*CONSTANT *Data*VARIABLES *val, ready, ack*

$$\begin{aligned} \textit{Init} &\stackrel{\Delta}{=} \wedge \textit{val} \in \textit{Data} \\ &\wedge \textit{ready} \in \{0, 1\} \\ &\wedge \textit{ack} = \textit{ready} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Send} &\stackrel{\Delta}{=} \wedge \textit{ready} = \textit{ack} \\ &\wedge \textit{val}' \in \textit{Data} \\ &\wedge \textit{ready}' = 1 - \textit{ready} \\ &\wedge \text{UNCHANGED } \textit{ack} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Receive} &\stackrel{\Delta}{=} \wedge \textit{ready} \neq \textit{ack} \\ &\wedge \textit{ack}' = 1 - \textit{ack} \\ &\wedge \text{UNCHANGED } \langle \textit{val}, \textit{ready} \rangle \end{aligned}$$

$$\textit{Next} \stackrel{\Delta}{=} \textit{Send} \vee \textit{Receive}$$

$$\textit{Spec} \stackrel{\Delta}{=} \textit{Init} \wedge \square[\textit{Next}]_{\langle \textit{val}, \textit{ready}, \textit{ack} \rangle}$$

## Mise en pratique : factorielle

Écrire la spécification d'un programme qui définit la factorielle d'un entier  $N$ , c'est-à-dire écrire une spécification telle qu'une variable contiendra, en un point déterminé d'une exécution, la valeur de  $N!$  et ne changera plus ensuite.

- En une transition (!)
- En  $N$  transitions déterministes, par multiplications successives, par ordre croissant ou décroissant
- En  $\lceil \frac{N}{2} \rceil$  à  $N$  transitions non déterministes, en pouvant faire deux multiplications en une transition
- En  $N$  transitions non déterministes, sans ordre particulier des multiplications
- En  $1..N$  transitions non déterministes, en pouvant réaliser plusieurs multiplications en une transition





# Plan

- 1 Spécification
  - Structure
  - Constantes
  - Expressions
- 2 Actions
- 3 **Fonctions**
  - Fonctions de  $X$  dans  $Y$
  - Les enregistrements (records)
  - Tuples & séquences
  - Définition récursive
- 4 Divers



# Fonctions

Fonction au sens mathématique : *mapping*, correspondance.

- $[X \rightarrow Y]$  = ensemble des fonctions de  $X$  dans  $Y$ .
- $f$  fonction de  $X$  dans  $Y$  :  $f \in [X \rightarrow Y]$
- $f[x] \stackrel{\Delta}{=} \text{la valeur de } f \text{ en } x$ .

Une fonction est une **valeur**.

Une variable contenant une fonction peut changer de valeur

$\Rightarrow$  “la fonction change” par abus de langage.



## Définition

### Définition d'un symbole constant

$f[x \in Nat] \triangleq$  expression utilisant  $x$

Exemple :  $Succ[x \in Nat] \triangleq x + 1$

### Définition d'une valeur

$[x \in S \mapsto expr]$

Exemples :  $[x \in 1..4 \mapsto 2 * x]$ ,  $[x \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11\} \mapsto 2 * x + 1]$

### Tableaux

Tableau : fonction  $t \in [X \rightarrow Y]$  où  $X$  est un intervalle d'entiers.

## Domaine/Codomaine

### Domain

$\text{DOMAIN } f = \text{domaine de définition de } f$

### Codomaine (range)

$\text{Codomain}(f) \triangleq \{f[x] : x \in \text{DOMAIN } f\}$

## EXCEPT

Une variable contenant une fonction peut changer de valeur :

MODULE *m*

VARIABLE *a*

*Init*  $\triangleq a = [i \in 1..3 \mapsto i + 1]$

*Act1*  $\triangleq \wedge a[1] = 2$   
 $\wedge a' = [i \in 1..6 \mapsto i * 2]$

*Act2*  $\triangleq \wedge a[2] = 4$   
 $\wedge a' = [i \in 1..6 \mapsto \text{IF } i = 2 \text{ THEN } 8 \text{ ELSE } a[i]]$

## EXCEPT

$[a \text{ EXCEPT } ![i] = v]$  équivalent à

$[j \in \text{DOMAIN } a \mapsto \text{IF } j = i \text{ THEN } v \text{ ELSE } a[j]]$

$(a' = [a \text{ EXCEPT } ![2] = 8]) \neq (a[2]' = 8)$

# Enregistrements

## Enregistrement

Un enregistrement (record) est une fonction de  $[X \rightarrow Y]$  où  $X$  est un ensemble de chaînes.

Écriture simplifiée :

$$\begin{aligned} [ \text{"toto"} \mapsto 1, \text{"titi"} \mapsto 2 ] &= [ \text{toto} \mapsto 1, \text{titi} \mapsto 2 ] \\ \text{rec}[\text{"toto"}] &= \text{rec.toto} \end{aligned}$$



# Tuple

## n-tuple

Notation :  $\langle a, b, c \rangle$ .

Un n-tuple est une fonction de domaine =  $\{1, \dots, n\}$  :

$$\langle a, b, c \rangle[3] = c$$

Pratique pour représenter des relations :

$$\{\langle x, y \rangle \in X \times Y : R(x, y)\}.$$

$$\text{Exemple : } \{\langle a, b \rangle \in \text{Nat} \times \text{Nat} : a = 2 * b\}.$$



# Séquences

## Séquences

$Seq(T) \triangleq \text{UNION } \{[1 .. n \rightarrow T] : n \in Nat\}$

$\triangleq$  ensemble des séquences finies contenant des  $T$ .

Opérateurs  $Len(s)$ ,  $s \circ t$  (concaténation),  $Append(s, e)$ ,  $Head(s)$ ,  $Tail(s)$ .

Exemple de définition des opérateurs :

$s \circ t \triangleq [i \in 1..(Len(s) + Len(t))$

$\mapsto \text{IF } i \leq Len(s) \text{ THEN } s[i] \text{ ELSE } t[i - Len(s)]]$

$Append(s, e) \triangleq s \circ \langle e \rangle$



# Fonction $\neq$ opérateur

$$\text{Succ}F[x \in \text{Nat}] \stackrel{\Delta}{=} x + 1$$

$$\text{Succ}O(x) \stackrel{\Delta}{=} x + 1$$

- $\text{Succ}F$  est une définition de fonction au sens mathématique
  - Équivalent à  $\text{Succ}F \stackrel{\Delta}{=} [x \in \text{Nat} \mapsto x + 1]$
  - Son domaine est un ensemble :  $\text{DOMAIN } \text{Succ}F = \mathbb{N}$
  - Son co-domaine est un ensemble :  
 $\{\text{Succ}F[x] : x \in \text{DOMAIN } \text{Succ}F\} = \mathbb{N}^*$
  - $\text{Succ}F \in [X \rightarrow Y]$  a du sens
- $\text{Succ}O$  est la définition d'un opérateur
  - Factorisation d'écriture : similaire à une macro dont on peut substituer le texte
  - N'a pas de domaine ou de co-domaine
  - $\text{Succ}O \in [X \rightarrow Y]$  n'a pas de sens



## Définition récursive

Lors de la définition de symbole (fonction ou opérateur), il est possible de donner une définition récursive :

- Fonction :

$$fact[n \in Nat] \stackrel{\Delta}{=} \text{IF } n = 0 \text{ THEN } 1 \text{ ELSE } n * fact[n - 1]$$

- Opérateur :

*RECURSIVE*  $fact(-)$

$$fact(n) \stackrel{\Delta}{=} \text{IF } n = 0 \text{ THEN } 1 \text{ ELSE } n * fact(n - 1)$$

En théorie, il faudrait démontrer la validité de ces définitions (terminaison dans tous les cas).



# Plan

- 1 Spécification
  - Structure
  - Constantes
  - Expressions
- 2 Actions
- 3 Fonctions
  - Fonctions de  $X$  dans  $Y$
  - Les enregistrements (records)
  - Tuples & séquences
  - Définition récursive
- 4 Divers



## Définition de symbole local

LET

Expression :  $\text{LET } v \triangleq e \text{ IN } f$

Équivalent à l'expression  $f$  où toutes les occurrences du symbole  $v$  sont remplacées par  $e$ .

Exemple :  $\text{LET } i \triangleq g(x) \text{ IN } f(i)$   
 $\equiv f(g(x))$

$\text{pythagore}(x, y, z) \triangleq \text{LET } \text{carre}(n) \triangleq n * n \text{ IN}$   
 $\text{carre}(x) + \text{carre}(y) = \text{carre}(z)$



## Choix déterministe

### Opérateur de choix

$\text{CHOOSE } x \in S : p \triangleq$  choix arbitraire *déterministe* d'un élément dans l'ensemble  $S$  et qui vérifie le prédicat  $p$ .

### Maximum d'un ensemble

$\text{max}[S \in \text{SUBSET } \text{Nat}] \triangleq \text{CHOOSE } m \in S : (\forall p \in S : m \geq p)$

### Somme des éléments d'un ensemble

$\text{Somme}[S \in \text{SUBSET } \text{Nat}] \triangleq$   
IF  $S = \emptyset$  THEN 0  
LET  $e \triangleq \text{CHOOSE } x \in S : \text{TRUE}$   
IN  $e + \text{Somme}[S \setminus \{e\}]$

## Choix déterministe - 2

### Choix déterministe

CHOOSE  $x \in S : p = \text{CHOOSE } x \in S : p$  (aïe)

Pour un ensemble  $S$  et une propriété  $p$ , l'élément choisi est toujours le même, dans toutes les exécutions et tout au long de celles-ci. Ce n'est pas un sélecteur aléatoire qui donne un élément distinct à chaque appel.

- La spécification

$(x = \text{CHOOSE } n : n \in \text{Nat}) \wedge \square[x' = \text{CHOOSE } n : n \in \text{Nat}]_{\langle x \rangle}$

a une **unique** exécution :  $x = c \rightarrow x = c \rightarrow \dots$  où  $c$  est un nombre entier indéterminé (spécifié par le *choose*).

- La spécification

$(x \in \text{Nat}) \wedge \square[x' \in \text{Nat}]_{\langle x \rangle}$

a une infinité d'exécutions, dont certaines où  $x$  est différent dans chaque état, d'autres où  $x$  finit par être constant. . .

## Conclusion

Les actions  $TLA^+$  sont un noyau minimal permettant d'exprimer toute spécification de système de transition (= tout programme) à partir de :

- la logique du premier ordre
- la théorie des ensembles
- les fonctions (*mapping*)
- les valeurs avant/après des variables

