Troisième partie

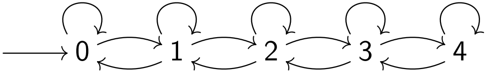
L'équité dans les systèmes de transition

Plan

Pourquoi de l'équité ?

$\text{MODULE } \mathit{oscillant}$
$\text{CONSTANT } N$
$\text{VARIABLE } i$

$$
\begin{aligned}
\mathit{Init} &\triangleq i = 0 \\
\mathit{Next} &\triangleq \begin{array}{l} \lor\ i > 0 \land i' = i - 1 \\ \lor\ i < N \land i' = i + 1 \end{array} \\
\mathit{Spec} &\triangleq \mathit{Init} \land \Box[\mathit{Next}]_i
\end{aligned}
$$



On pourrait vouloir éliminer les exécutions :

- 0^ω
- $(0 \to 1)^\omega$
- $\ldots \to n^\omega$
- qui ne passent pas infiniment souvent par l'état 2
- qui ne contiennent pas une infinité d'incrémentation

Contraintes d'équité / *fairness*

Les contraintes d'équité spécifient que certains états (resp. certaines transitions) doivent être visités (resp. exécutées) infiniment souvent dans toute exécution du programme.

D'une façon générale, les contraintes d'équité servent à contraindre un programme ou son environnement à être vivace, sans entrer dans les détails concernant la réalisation pratique de ces contraintes.

Les contraintes d'équité réduisent l'ensemble des exécutions légales, en éliminant les exécutions qui ne respectent pas les contraintes d'équité.

États récurrents ♪♪♪

Ensemble récurrent d'états

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transition et $\sigma = \langle s_0 \to \ldots \rangle$ une exécution.

Un ensemble d'états P est récurrent dans σ si :

- cas σ infinie : $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j \in P$
  (P apparaît une infinité de fois dans σ).
- cas σ finie : l'état final de σ est dans P.

$Inf_S(P, \sigma) \triangleq$ P est un ensemble récurrent d'états dans σ.

Note : on dit aussi *infiniment souvent présent* dans σ.

Transitions récurrentes

♪♪♪

Ensemble récurrent de transitions

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transition et $\sigma = \langle s_0 \to \ldots \rangle$ une exécution.

Un ensemble de transitions Q est récurrent dans σ si :

- cas σ infinie : $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j \to s_{j+1} \in Q$
  (des transitions de Q apparaissent une infinité de fois dans σ).
- cas σ finie : la transition finale de σ est dans Q
  $(\sigma = \langle s_0 \to \ldots \to s \to s' \rangle \wedge s \to s' \in Q)$.

$Inf_T(Q, \sigma) \triangleq Q$ est un ensemble récurrent de transitions dans σ.

Exemple - états récurrents

$$
\begin{tikzcd}
 & & s_1 \arrow[dr] & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & s_3 \arrow[ll, bend right=80] \\
 & & s_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

s_1	récurrent dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^\omega \rangle$
s_1	récurrent dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3 \to s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
s_1	pas récurrent dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^* \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
$s_1 \to s_3$	récurrente dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3 \to s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
$s_1 \to s_3$	pas récurrente dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^* \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$

Plan

1. Contraintes d'équité
2. Équité sur les états
   - Équité simple
   - Équité multiple
   - Équité conditionnelle
3. Équité sur les transitions
   - Équité faible
   - Équité forte
   - Équité sur les étiquettes

Équité simple sur les états ♪♪♪

Équité simple

Soit un système de transition $\langle S, I, R\rangle$.
On se donne $F \subseteq S$ un ensemble d'états équitables.
Alors toute exécution σ doit être telle que $Inf_S(F, \sigma)$.

F est récurrent dans σ, i.e. σ contient une infinité d'états dans F (cas σ infini), ou le dernier état de σ est dans F (cas σ fini).

Remarque : l'ensemble F est récurrent, pas nécessairement chaque élément de F. Pour $\mathcal{S} \triangleq i = 0 \wedge \square((i' = i + 1) \vee (i' = i))$, si on se donne $F \triangleq \{i\%2 = 0\}$, les exécutions $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2^\omega$ et $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \ldots$ sont valides.

Exemple - équité simple

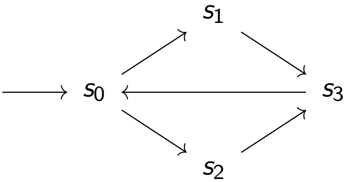
♪♪♪

$$
\begin{tikzcd}
 & & s_1 & & & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[ur] \arrow[r] & s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r, shift left] & s_4 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & s_5
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
Exec(S) \quad = \quad & \langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle, \\
& \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle
\end{aligned}
$$

Équité simple	Exécutions
$\{s_0\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle$
$\{s_1, s_4\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle$
$\{s_1, s_5\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$

Exemple - équité simple ♪♪♪



On fixe : équité simple sur $\{s_1\}$.

légale	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^\omega \rangle$
légale	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3 \to s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
illégale	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^\star \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
légale	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3 \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\star)^\omega \rangle$

Exemple - équité simple

$$
\begin{tikzcd}
 & & s_1 \arrow[dr] & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & s_3 \arrow[ll] \\
 & & s_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$Exec(S) \quad =$$

Équité simple	
$\{s_1\}$ $\{s_1, s_2\}$	

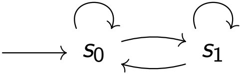
Équité multiple sur les états

Équité multiple

Soit un système de transition $\langle S, I, R\rangle$.
On se donne un ensemble dénombrable, indexable par un ensemble d'entiers $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$, d'ensembles équitables $\{F_i\}_{i \in J}$.
Toute exécution σ doit être telle que $\forall i \in J : Inf_S(F_i, \sigma)$.

Exécutions vérifiant l'équité multiple $=$ intersection des exécutions vérifiant l'équité simple sur chacun des F_i.
$\Rightarrow$ l'équité simple est un cas particulier de l'équité multiple.

Exemple - équité multiple



$$Exec(S) \quad =$$

Équité simple/multiple	
$\{s_0\}$	
$\{s_0, s_1\}$	
$\{s_0\}\{s_1\}$	

Équivalence équité multiple finie $\leftrightarrow$ simple ♪♪♪

Cas simple : J est fini, de cardinalité $|J|$.

Le système $\langle S, I, R\rangle$ avec équité multiple $\{F_i\}_{i \in J}$ est équivalent à $\langle S', I', R'\rangle$ à équité simple F' (mêmes exécutions projetées sur S) :

- $S' = S \times J$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \begin{array}{l} \{(\langle s,j\rangle, \langle s', j+1 \bmod |J|\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ \cup\ \{(\langle s,j\rangle, \langle s', j\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{array}$
- Équité simple $F' = F_0 \times \{0\}$

Le premier ensemble de R' est pour le cas où on visite un état de F_j et on cherche donc à visiter l'ensemble suivant ; le deuxième ensemble est pour le cas où on n'est pas en train de visiter un état de F_j, que l'on continue à attendre.

Exemple équité multiple

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & s_1 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$ avec équité multiple : $F_0 = \{s_0\}, F_1 = \{s_1\}$

ST en équité simple équivalent :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & (s_0, 0) \arrow[r] \arrow[dr, bend left] & (s_0, 1) \arrow[loop above] \arrow[d] \\ & (s_1, 0) \arrow[u] \arrow[loop below] & (s_1, 1) \arrow[l] \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

avec équité simple sur $\{(s_0, 0)\}$

Équivalence équité multiple ↔ simple ♪♪♪

Cas général (J potentiellement infini).

Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple F' est équivalent :

- $S' = S \times J \times J$
- $I' = I \times \{0\} \times \{0\}$
- $R' =$
$$\begin{aligned} &\{(\langle s, i, i\rangle, \langle s', i \oplus 1, 0\rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \in F_i\} \\ \cup\ &\{(\langle s, i, j\rangle, \langle s', i, j+1\rangle) \mid j < i \wedge (s, s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ \cup\ &\{(\langle s, i, j\rangle, \langle s', i, j\rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{aligned}$$
- Équité simple $F' = F_0 \times J \times \{0\}$

avec : $i \oplus 1 \triangleq \begin{cases} i+1 & \text{si } J \text{ est infini} \\ i+1 \bmod |J| & \text{sinon} \end{cases}$

Dans une exécution équitable, les compteurs i, j forment un triangle :
$\langle (0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (2,0) \to (2,1) \to (2,2) \to (3,0) \to \ldots \rangle$

Exemple équité multiple

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & s_1 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$ avec équité multiple : $F_0 = \{s_0\}, F_1 = \{s_1\}$

ST en équité simple équivalent :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & (s_0, 0, 0) \arrow[r] \arrow[dr] & (s_0, 1, 0) \arrow[r] \arrow[dr] & (s_0, 1, 1) \arrow[loop above] \arrow[d] & \color{gray}{(s_0, 0, 0)} \\ & & (s_1, 1, 0) \arrow[u] \arrow[loop below] & (s_1, 1, 1) \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & (s_1, 0, 0) \arrow[loop below] \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

avec équité simple sur $\{(s_0, 0, 0), (s_0, 1, 0)\}$

Équité conditionnelle sur les états

Équité conditionnelle

Soit un système de transition $\langle S, I, R \rangle$.
On se donne deux ensembles F et G.
Toute exécution σ doit être telle que $Inf_S(F, \sigma) \Rightarrow Inf_S(G, \sigma)$.

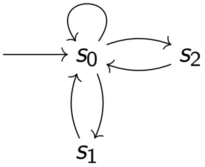
Si F est récurrent dans σ, alors G doit être récurrent dans σ.

$$
\begin{tikzcd}
 & & s_1 & & & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[ur] \arrow[r] & s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r, shift left] & s_4 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & s_5
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
Exec(S) \;=\; & \langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \to s_2 \to (s_3 \to s_4)^{\omega} \rangle, \\
& \langle {s_0}^{+} \to s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \to s_2 \to (s_3 \to s_4)^{+} \to s_5 \rangle
\end{aligned}
$$

Équité cond.	Exécutions
$\{s_0\} \Rightarrow \{s_5\}$	$\langle {s_0}^{+} \to s_2 \to (s_3 \to s_4)^{\omega} \rangle$, $\langle {s_0}^{+} \to s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \to s_2 \to (s_3 \to s_4)^{+} \to s_5 \rangle$
$\{s_3\} \Rightarrow \{s_4\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \to s_2 \to (s_3 \to s_4)^{\omega} \rangle$, $\langle {s_0}^{+} \to s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \to s_2 \to (s_3 \to s_4)^{+} \to s_5 \rangle$

Exemple - équité conditionnelle



$$Exec(S) \ =$$

Équité cond.	
$\{s_1\} \Rightarrow \{s_2\}$	

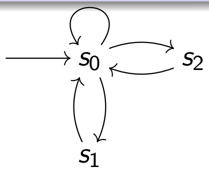
Équivalence équité conditionnelle ↔ simple ♪♪♪

Soit un système $\langle S, I, R\rangle$ avec équité conditionnelle $F \Rightarrow G$.
Le système $\langle S', I', R'\rangle$ à équité simple F' est équivalent :

- $S' = (S \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \begin{array}{l} \quad \{(\langle s,0\rangle, \langle s',0\rangle) \mid (s,s') \in R\} \\ \cup \ \{(\langle s,0\rangle, \langle s',1\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s' \in (S \setminus F)\} \\ \cup \ \{(\langle s,1\rangle, \langle s',1\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s,s' \in (S \setminus F)\} \end{array}$
- Équité simple $F' = (G \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$

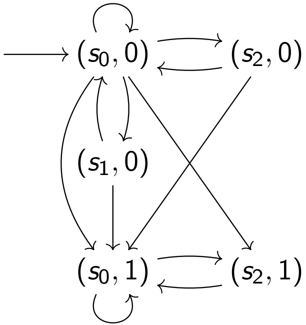
Les états $\langle s, 0\rangle$, identiques au système d'origine, correspondent aux exécutions où G doit être infiniment souvent visité.
Les états $\langle s, 1\rangle$, restreints aux états non dans F, correspondent aux exécutions où F ne doit plus jamais être visité.

Exemple équité conditionnelle



avec équité conditionnelle : $F = \{s_1\}, G = \{s_2\}$

ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur $\{(s_2, 0), (s_0, 1), (s_2, 1)\}$

Plan

1. Contraintes d'équité
2. Équité sur les états
   - Équité simple
   - Équité multiple
   - Équité conditionnelle
3. Équité sur les transitions
   - Équité faible
   - Équité forte
   - Équité sur les étiquettes

Équité sur les transitions

L'équité sur les transitions est plus précise que l'équité sur les états. Informellement, une exécution infinie est non équitable vis-à-vis d'une transition si :

- la transition n'apparaît qu'un nombre fini de fois,
- et la transition est continûment faisable (équité faible) ou infiniment souvent faisable (équité forte).

Les définitions suivantes sont correctes aussi bien pour les exécutions infinies que pour les exécutions finies maximales. Pour autant, les explications sont plus faciles sur les exécutions infinies. Le bégaiement est présent par défaut dans TLA$^+$et dans la majorité des méthodes outillées s'appuyant sur les systèmes de transition, ce qui justifie cette simplification.

Équité faible sur les transitions ♪♪♪

Équité faible

Soit un ST $\langle S, I, R\rangle$ et $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions.
F est faiblement équitable ssi dans toute exécution σ :

$$Inf_S(S \setminus dom(F), \sigma) \vee Inf_T(F, \sigma)$$

(l'ensemble d'états $S \setminus dom(F)$ est récurrent,
ou l'ensemble de transitions F est récurrent)

Ou, de manière équivalente :

$$\neg Inf_S(S \setminus dom(F), \sigma) \Rightarrow Inf_T(F, \sigma)$$

(si l'ensemble d'états $S \setminus dom(F)$ n'est pas récurrent,
alors l'ensemble de transitions F est récurrent)

L'équité faible exprime que l'on n'a pas le droit de rester indéfiniment dans un ensemble spécifié d'états alors qu'il existe toujours une transition en équité faible qui est exécutable.

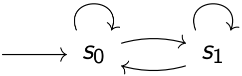
Exemple - équité faible

$$\begin{tikzcd}
& & s_1 \arrow[loop above] & & & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[ur] \arrow[r] & s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r, shift left] & s_4 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & s_5 \arrow[loop above]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} Exec(S) & = & \langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle, \\ & & \langle {s_0}^{+} \rightarrow {s_1}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow {s_5}^{\omega} \rangle \end{array}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle$, $\langle {s_0}^{+} \rightarrow {s_1}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow {s_5}^{\omega} \rangle$
$\{(s_0, s_1), (s_0, s_0)\}$	*toutes*
$\{(s_4, s_5)\}$	*toutes*

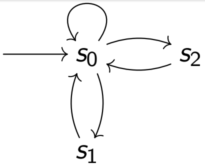
Exemple - équité faible



$$
\begin{aligned}
Exec(S) \quad = \quad & \langle ({s_0}^+ \rightarrow {s_1}^+)^\omega \rangle, \\
& \langle ({s_0}^+ \rightarrow {s_1}^+)^* \rightarrow {s_0}^\omega \rangle, \\
& \langle ({s_0}^+ \rightarrow {s_1}^+)^* \rightarrow {s_0}^+ \rightarrow {s_1}^\omega \rangle
\end{aligned}
$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle ({s_0}^+ \rightarrow {s_1}^+)^\omega \rangle$, $\langle ({s_0}^+ \rightarrow {s_1}^+)^* \rightarrow {s_0}^+ \rightarrow {s_1}^\omega \rangle$
$\{(s_0, s_0)\}$	*toutes*
$\{(s_0, s_0), (s_0, s_1)\}$	*toutes*

Exemple - équité faible



On note $T \triangleq s_0{}^* \to (s_0 \to s_1)^* \to (s_0 \to s_2)^* \setminus \langle\rangle$.
(le $\setminus\langle\rangle$ garantit que T ne contient pas la séquence vide)

$$Exec(S) \quad = \quad \langle T^\omega \rangle$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_2)\}$	$\langle T^* \to (s_0{}^* \to (s_0 \to s_1)^* \to s_0{}^* \to (s_0 \to s_2)^+)^\omega \rangle$, $\langle T^* \to (s_0{}^* \to (s_0 \to s_1)^+)^\omega \rangle$

Exemple - équité faible

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[r] & s_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & s_3 \arrow[loop right] \\
 & & s_2 \arrow[r] \arrow[u, shift left] & s_4 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}
$$

$$Exec(S) \quad =$$

Équité faible	
$\{(s_2, s_4)\}$ $\{(s_2, s_4), (s_1, s_3)\}$	

Exemple - équité faible

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] \arrow[d] & s_1 \arrow[l, bend left] \arrow[dl] \\
& s_2 \arrow[loop left] &
\end{tikzcd}$$

$$Exec(S) \quad =$$

Équité faible	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_2), (s_1, s_2)\}$	

Équité faible → équité simple sur les états ♪♪♪

Soit un système $\langle S, I, R\rangle$ avec équité faible sur F.
Le système $\langle S', I', R'\rangle$ à équité simple F' est équivalent :

- $S' = S \times \{0,1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \quad \{(\langle s, \_\rangle, \langle s', 1\rangle) \mid (s, s') \in R \cap F\}$
  $\cup \{(\langle s, \_\rangle, \langle s', 0\rangle) \mid (s, s') \in R \setminus F\}$
- Équité simple $F' = S \setminus dom(F) \times \{0,1\} \ \cup \ S \times \{1\}$

Les états $\langle s, 1\rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F, les états $\langle s, 0\rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F.

Équité forte sur les transitions ♪♪♪

Équité forte

Soit un ST $\langle S, I, R \rangle$ et $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions.
F est fortement équitable ssi dans toute exécution σ :

$$\neg Inf_S(dom(F), \sigma) \vee Inf_T(F, \sigma)$$

l'ensemble d'états $dom(F)$ n'est pas récurrent,
ou l'ensemble de transitions F est récurrent.

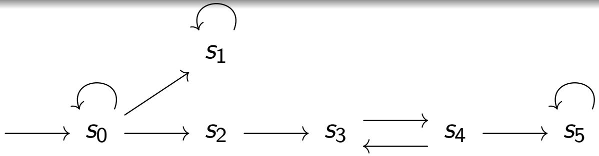
Ou, de manière équivalente :

$$Inf_S(dom(F), \sigma) \Rightarrow Inf_T(F, \sigma)$$

si l'ensemble d'états $dom(F)$ est récurrent,
alors l'ensemble de transitions F est récurrent.

L'équité forte exprime que si l'on passe infiniment souvent dans un ensemble d'états où des transitions de r sont exécutables, alors une transition de r finit par être exécutée.

Exemple - équité forte



$$\begin{aligned} Exec(S) \quad = \quad & \langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle, \\ & \langle {s_0}^{+} \rightarrow {s_1}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow {s_5}^{\omega} \rangle \end{aligned}$$

Équité forte	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle$, $\langle {s_0}^{+} \rightarrow {s_1}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow {s_5}^{\omega} \rangle$
$\{(s_4, s_5)\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow {s_1}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow {s_5}^{\omega} \rangle$
$\{(s_3, s_4), (s_4, s_5)\}$	*toutes*

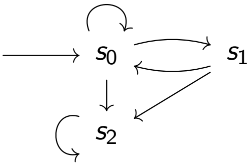
Exemple - équité forte

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[r] & s_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & s_3 \arrow[loop right] \\
& & s_2 \arrow[r] \arrow[u, shift left] & s_4 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

$$Exec(S) \quad =$$

Équité forte	
$\{(s_2, s_4)\}$	

Exemple - équité forte



$$Exec(S) \quad =$$

Équité forte	
$\{(s_0, s_1)\}$ $\{(s_1, s_2)\}$ $\{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$	

Équité forte $\rightarrow$ équité conditionnelle sur les états ♪♪♪

Soit un système $\langle S, I, R\rangle$ avec équité forte sur F.
Le système $\langle S', I', R'\rangle$ à équité conditionnelle $F' \Rightarrow G'$ est équivalent :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \quad \{\langle s, \_\rangle, \langle s', 1\rangle) \mid (s, s') \in R \cap F\}$
  $\cup\ \{\langle s, \_\rangle, \langle s', 0\rangle) \mid (s, s') \in R \setminus F\}$
- Équité conditionnelle $\quad F' = dom(F) \times \{0, 1\}$
  $G' = S \times \{1\}$

Les états $\langle s, 1\rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F, les états $\langle s, 0\rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F.

Combinaisons d'équités faibles/fortes

En pratique, on se donne

- plusieurs ensembles de transitions en équité faible,
- plusieurs ensembles de transitions en équité forte.

Le système doit respecter toutes ces contraintes (la conjonction).

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & s_1 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & s_2 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Équité faible sur $\{(s_0, s_1)\}$ (interdit le bégaiement infini sur s_0)
Équité faible sur $\{(s_1, s_2)\}$ (idem pour s_1)
Équité faible sur $\{(s_2, s_1)\}$ (idem pour s_2)
Équité forte sur $\{(s_1, s_2)\}$ (interdit de ne jamais aller en s_2)

Ici, équivalent à équité multiple sur $\{\{s_1\}, \{s_2\}\}$: toute exécution où s_1 et s_2 apparaissent infiniment souvent.

Équité sur les étiquettes

Dans le cas d'un système de transition étiqueté, on peut également définir l'équité (faible ou forte) sur un ensemble d'étiquettes $F \subseteq L$. Cela revient à l'équité sur les transitions $Etiq^{-1}(F)$.

Conclusion

- L'équité contraint des états / des transitions à être visité(e)s infiniment souvent.
- Les contraintes d'équité éliminent les exécutions non équitables, jugées sans intérêt.
- On utilise plutôt l'équité sur les transitions qui traduit que, si une action est toujours faisable / infiniment souvent faisable, elle aura lieu : le système n'est pas injuste vis-à-vis de ces actions.