Quatrième partie

LTL – logique temporelle linéaire

Plan

Logiques temporelles

Objectif

Exprimer des propriétés portant sur les exécutions des systèmes.

Spécification non opérationnelle : pas de relation de transition explicite, pas de notion d'états initiaux.
Une logique est définie par :

- une syntaxe : opérateurs de logique classique plus des opérateurs temporels pour parler du futur et du passé.
- une sémantique : domaine des objets (appelés modèles) sur lesquels on va tester la validité des formules, plus l'interprétation des opérateurs.

Plan

Linear Temporal Logic ♪♪♪

Modèles

Une formule LTL se rapporte toujours à une trace donnée σ d'un système : les traces constituent les modèles de cette logique.

Note : plutôt que d'*état*, on parle souvent d'*instant* pour désigner les éléments d'une trace.

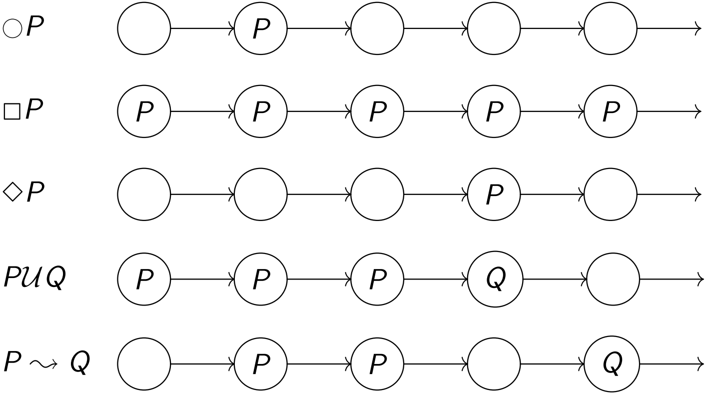
Rappel : pour un ST $\langle S, I, R\rangle$, une trace est une séquence $\sigma \in S^\star \cup S^\omega$, tel que pour tout s_i, s_{i+1} consécutifs, $(s_i, s_{i+1}) \in R$.

Syntaxe de la LTL ♪♪♪

formule	nom	interprétation
s		le premier état de la trace est s
$\neg P$		
$P \vee Q$		
$P \wedge Q$		
$\bigcirc P$	*next*	P est vrai à l'instant suivant
$\Box P$	*always*	P est toujours vrai
		i.e. à tout instant à partir de l'instant courant
$\Diamond P$	*eventually*	P sera vrai (dans le futur)
$P \mathcal{U} Q$	*until*	Q sera vrai, et en attendant P reste vrai
$P \leadsto Q$	*leadsto*	quand P est vrai, alors Q est vrai plus tard

Dans les approches symboliques, l'opérateur $\bigcirc$ représentant l'instant suivant peut être remplacé par des variables primées qui représentent la valeur des variables du système dans l'état suivant.

Intuition sémantique



Opérateurs minimaux ♪♪♪

Les opérateurs minimaux sont $\bigcirc P$ et $P \mathcal{U} Q$:

- $\Diamond P \triangleq True\, \mathcal{U} P$
- $\Box P \triangleq \neg \Diamond \neg P$
- $P \leadsto Q \triangleq \Box(P \Rightarrow \Diamond Q)$

Syntaxe alternative

Syntaxe alternative

On trouve fréquemment une autre syntaxe :

$\Box \leftrightarrow$ G (*globally*)

$\Diamond \leftrightarrow$ F (*finally*)

$\bigcirc \leftrightarrow$ X (*next*)

Opérateurs complémentaires

- Opérateur *waiting-for* (ou *unless* ou *weak-until*)
  $P \mathcal{W} Q \triangleq \Box P \vee P \mathcal{U} Q$
  Q finit peut-être par être vrai et en attendant P reste vrai
- Opérateur *release*
  $P \mathcal{R} Q \triangleq Q \mathcal{U} (P \wedge Q)$
  Q reste vrai jusqu'à ce que P le devienne.

Opérateurs du passé

formule	nom	interprétation
$\ominus P$	*previously*	P est vrai dans l'instant précédent
$\boxminus P$	*has-always-been*	P a toujours été vrai jusqu'à l'instant courant
$\diamondminus P$	*once*	P a été vrai dans le passé
$P \mathcal{S} Q$	*since*	Q a été vrai dans le passé et P est resté vrai depuis la dernière occurrence de Q
$P \mathcal{B} Q$	*back-to*	P est vrai depuis la dernière occurrence de Q, ou depuis l'instant initial si Q n'a jamais été vrai

Peu utilisés en pratique.

Sémantique (système) ♪♪♪

On note (σ, i) pour le suffixe $\langle s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \ldots \rangle$ d'une trace $\sigma = \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \ldots \rangle$.

Vérification par un système

Un système $\mathcal{S}$ vérifie (valide) la formule F ssi toutes les exécutions de $\mathcal{S}$ la valident à partir de l'instant initial :

$$\frac{\forall \sigma \in Exec(\mathcal{S}) : (\sigma, 0) \models F}{\mathcal{S} \models F}$$

Rappel : les exécutions d'un système sont ses traces finies maximales et infinies, et qui débutent par un état initial.

Sémantique (opérateurs logiques)

Sémantique standard des opérateurs logiques

$$\frac{(\sigma, i) \models P \quad (\sigma, i) \models Q}{(\sigma, i) \models P \wedge Q}$$

$$\frac{(\sigma, i) \models P}{(\sigma, i) \models P \vee Q} \qquad \frac{(\sigma, i) \models Q}{(\sigma, i) \models P \vee Q}$$

$$\frac{\neg\ (\sigma, i) \models P}{(\sigma, i) \models \neg P}$$

Sémantique (opérateurs temporels) ♪♪♪

$$\frac{\sigma_i = s}{(\sigma, i) \models s}$$

$$\frac{(\sigma, i+1) \models P}{(\sigma, i) \models \bigcirc P}$$

$$\frac{\exists k \geq 0 : (\sigma, i+k) \models Q \wedge \forall k', 0 \leq k' < k : (\sigma, i+k') \models P}{(\sigma, i) \models P \mathcal{U} Q}$$

Sémantique (opérateurs temporels dérivés) ♪♪♪

$$\frac{\exists k \geq 0 : (\sigma, i+k) \models P}{(\sigma, i) \models \Diamond P}$$

$$\frac{\forall k \geq 0 : (\sigma, i+k) \models P}{(\sigma, i) \models \Box P}$$

$$\frac{\forall k \geq 0 : ((\sigma, i+k) \models P \Rightarrow \exists k' \geq k : (\sigma, i+k') \models Q)}{(\sigma, i) \models P \leadsto Q}$$

Réduction à la logique pure ♪♪♪

- La logique temporelle linéaire possède une expressivité telle qu'elle peut représenter exactement n'importe quelle spécification opérationnelle décrite en termes de système de transitions, d'où :
- vérifier qu'un système de transitions $\mathcal{M}$ possède la propriété temporelle $F_{\mathcal{S}pec}$:

$$\mathcal{M} \models F_{\mathcal{S}pec}$$

- revient à déterminer la validité de :

$$F_{\mathcal{M}} \Rightarrow F_{\mathcal{S}pec}$$

où $F_{\mathcal{M}}$ est une formule représentant exactement les exécutions du modèle $\mathcal{M}$ (i.e. ses états initiaux, ses transitions, ses contraintes d'équité).

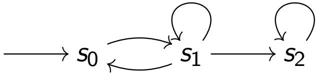
Plan

Exemple 1

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r] & s_1 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

	pas d'équité	équité faible (s_0, s_1)
$s_0 \wedge \bigcirc s_0$		
$s_0 \wedge \bigcirc(s_0 \vee s_1)$		
$\Box(s_0 \Rightarrow \bigcirc s_0)$		
$\Box(s_0 \Rightarrow \bigcirc(s_0 \vee s_1))$		
$\Box(s_1 \Rightarrow \bigcirc s_1)$		
$\Diamond(s_0 \wedge \bigcirc s_1)$		
$\Box s_0$		
$\Diamond \neg s_0$		
$\Diamond \Box s_1$		
$s_0 \mathcal{W} s_1$		
$s_0 \mathcal{U} s_1$		

Exemple 2



	pas d'équité	faible (s_1, s_2)	forte (s_1, s_2)
$\Box\Diamond\neg s_1$			
$\Box(s_1 \Rightarrow \Diamond s_2)$			
$\Diamond\Box(s_1 \vee s_2)$			
$\Box(s_1 \mathcal{U} s_2)$			
$\Box(s_0 \Rightarrow s_0 \mathcal{U} s_1)$			
$\Box(s_0 \mathcal{U}(s_1 \vee s_2))$			
$\Box(s_1 \Rightarrow s_1 \mathcal{U} s_2)$			
$\Diamond(s_1 \mathcal{U} s_2)$			
$\Diamond(s_1 \mathcal{W} s_2)$			
$\Box\Diamond(s_1 \mathcal{U}(s_0 \vee s_2))$			

Sûreté/vivacité – *Safety/Liveness*

On qualifie de

- Sûreté : rien de mauvais ne se produit
  = propriété qui s'invalide sur un préfixe fini d'une exécution :
  $\Box P$, $\Box(P \Rightarrow \Box P)$, $P \mathcal{W} Q \ldots$
- Vivacité : quelque chose de bon finit par se produire
  = propriété qui peut toujours être validée en étendant le préfixe d'une exécution :
  $\Diamond P$, $P \leadsto Q \ldots$
- Certaines propriétés combinent vivacité et sûreté :
  $P \mathcal{U} Q$, $\Box P \wedge \Diamond Q \ldots$
  - Réponse : $\Box\Diamond P$
  - Persistance : $\Diamond\Box P$

Invariance, stabilité

Invariance

Spécifier un sur-ensemble des états accessibles d'un système :

$$\mathcal{S} \models \Box P$$

où P est un prédicat d'état.

Stabilité

Spécifier la stabilité d'une situation si elle survient :

$$\mathcal{S} \models \Box(P \Rightarrow \Box P)$$

où P est un prédicat d'état.

Possibilité

♪♪♪

Possibilité

Spécifier qu'il est possible d'atteindre un certain état vérifiant P dans une certaine exécution :
Impossible pour P arbitraire, mais pour P un prédicat d'état :

$$\mathcal{S} \not\models \Box\neg P$$

Attention à la négation : $\neg\Box P = \Diamond\neg P$ mais $\mathcal{S} \not\models \Box P \not\Rightarrow \mathcal{S} \models \Diamond\neg P$

Négation ♪♪♪

Négation : danger !

$$\text{Pour } \sigma \text{ exécution : } \sigma \models \neg P \equiv \sigma \not\models P$$

$$\text{Pour } \mathcal{S} \text{ système : } \mathcal{S} \models \neg P \Rightarrow \mathcal{S} \not\models P \text{ mais pas l'inverse !}$$

$\mathcal{S} \not\models Q$ signife qu'il existe au moins une exécution qui invalide Q ($=$ qui valide $\neg Q$), mais pas que toutes les exécutions le font.
En LTL, on peut avoir $\mathcal{S} \not\models Q \wedge \mathcal{S} \not\models \neg Q$:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r] & s_1 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

$$\frac{{s_0}^{+} \rightarrow {s_1}^{\omega} \not\models \Box s_0}{\mathcal{S} \not\models \Box s_0} \qquad \frac{{s_0}^{\omega} \not\models \Diamond \neg s_0}{\mathcal{S} \not\models \Diamond \neg s_0}$$

Combinaisons

Infiniment souvent – Réponse

Spécifier que P est infiniment souvent vrai dans toute exécution :

$$\mathcal{S} \models \Box\Diamond P$$

Finalement toujours – Persistance

Spécifier que P finit par rester définitivement vrai :

$$\mathcal{S} \models \Diamond\Box P$$

Note : $\Box\Box P = \Box P$ et $\Diamond\Diamond P = \Diamond P$

Client/serveur

Réponse

Spécifier qu'un système (jouant le rôle d'un serveur) répond toujours (Q) à un requête donnée (P) :

$$\mathcal{S} \models \Box(P \Rightarrow \Diamond Q)$$

Souvent nommé leads-to :

$$\mathcal{S} \models P \leadsto Q$$

Stabilité d'une requête

Spécifier que la requête P d'un système (jouant le rôle d'un client) est stable tant qu'il n'y a pas de réponse favorable Q :

$$\mathcal{S} \models \Box(P \Rightarrow P \mathcal{W} Q)$$

Équité des transitions – *Fairness*

♪♪♪

Rappel informel :

faible : continûment faisable → infiniment souvent fait

forte : infiniment souvent faisable → infiniment souvent fait

Équité faible des transitions

Soit $r \subseteq R$. Les transitions r sont en équité faible dans $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \models \Diamond\Box dom(r) \Rightarrow \Box\Diamond r$$
$$\mathcal{S} \models \Box\Diamond\neg dom(r) \vee \Box\Diamond r$$

Équité forte des transitions

Soit $r \subseteq R$. Les transitions r sont en équité forte dans $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \models \Box\Diamond dom(r) \Rightarrow \Box\Diamond r$$
$$\mathcal{S} \models \Diamond\Box\neg dom(r) \vee \Box\Diamond r$$

(une transition $s \to s'$ est équivalente à $s \wedge \bigcirc s'$, et un ensemble de transition $\{t_1, t_2, \ldots\}$ est équivalent à $t_1 \vee t_2 \vee \ldots$)

Spécification d'un système de transitions

Si on utilise une description en intention, et si l'on remplace l'utilisation de l'opérateur $\bigcirc$ par les variables primées, alors on peut spécifier toutes les exécutions permises par un système $\langle S, I, R \rangle$:

$$\mathcal{S} \models I \wedge \Box R$$

L'utilisation de variables primées n'est pas nécessaire mais simplifie les formules.
Par exemple $P(x, x')$ est équivalent à la formule :
$\forall v : x = v \Rightarrow \bigcirc P(v, x)$
qui nécessite une quantification sur une variable.

Limites de l'expressivité

Tout n'est pas exprimable en LTL :

- Possibilité arbitraire : si P devient vrai, il est toujours possible (mais pas nécessaire) que Q le devienne après.
- Accessibilité d'un état : depuis l'état initial, il est possible d'atteindre cet état.
- Réinitialisabilité : quelque soit l'état, il est possible de revenir dans un des états initiaux.

(ces propriétés sont exprimables en Computational Tree Logic (CTL), à venir)

Conclusion

♪♪♪

La logique temporelle linéaire (LTL) permet d'exprimer, abstraitement, des propriétés sur les exécutions d'un système

Logiques modales

La LTL est un cas particulier de logique modale.
Autres interprétations :

- $\square$ = nécessité, $\diamond$ = possibilité
- logique de la croyance : « je crois que P est vrai »
- logique épistémique : « X sait que P »
- logique déontique : « P est obligatoire/interdit/permis »
- ...