

Troisième partie

L'équité dans les systèmes de transition



Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
 - Équité simple
 - Équité multiple
 - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
 - Équité faible
 - Équité forte
 - Équité sur les étiquettes



Pourquoi de l'équité ?

MODULE *oscillant*

CONSTANT N

VARIABLE i

$Init \triangleq i = 0$

$Next \triangleq \bigvee i > 0 \wedge i' = i - 1$
 $\bigvee i < N \wedge i' = i + 1$

$Spec \triangleq Init \wedge \Box[Next]_i$



On pourrait vouloir **éliminer** les exécutions :

- 0^ω
- $(0 \rightarrow 1)^\omega$
- $\dots \rightarrow n^\omega$
- qui ne passent pas infiniment souvent par l'état 2
- qui ne contiennent pas une infinité d'incrémentations



Contraintes d'équité / *fairness*



Les contraintes d'équité spécifient que certains états (resp. certaines transitions) doivent être visités (resp. exécutés) **infiniment souvent** dans toute exécution du programme.

D'une façon générale, les contraintes d'équité servent à contraindre un programme ou son environnement à être **vivace**, sans entrer dans les détails concernant la réalisation pratique de ces contraintes.

Les contraintes d'équité **réduisent** l'ensemble des exécutions légales, en éliminant les exécutions qui ne respectent pas les contraintes d'équité.



États récurrents



Ensemble récurrent d'états

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transition et $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \dots \rangle$ une exécution.

Un ensemble d'états P est **récurrent** dans σ si :

- cas σ infinie : $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j \in P$
(P apparaît une infinité de fois dans σ).
- cas σ finie : l'état final de σ est dans P .

$\text{Inf}_{\mathcal{S}}(P, \sigma) \triangleq P$ est un ensemble récurrent d'états dans σ .

Note : on dit aussi *infiniment souvent présent* dans σ .



Transitions récurrentes



Ensemble récurrent de transitions

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transition et $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \dots \rangle$ une exécution.

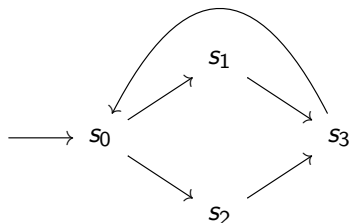
Un ensemble de transitions Q est **récurrent** dans σ si :

- cas σ infinie : $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j \rightarrow s_{j+1} \in Q$
(des transitions de Q apparaissent une infinité de fois dans σ).
- cas σ finie : la transition finale de σ est dans Q
($\sigma = \langle s_0 \rightarrow \dots \rightarrow s \rightarrow s' \rangle \wedge s \rightarrow s' \in Q$).

$\text{Inf}_T(Q, \sigma) \triangleq Q$ est un ensemble récurrent de transitions dans σ .



Exemple - états récurrents



s_1	récurrent dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$
s_1	récurrent dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$
s_1	pas récurrent dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

$s_1 \rightarrow s_3$	récurrente dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$
$s_1 \rightarrow s_3$	pas récurrente dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$



Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
 - Équité simple
 - Équité multiple
 - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
 - Équité faible
 - Équité forte
 - Équité sur les étiquettes



Équité simple sur les états



Équité simple

Soit un système de transition $\langle S, I, R \rangle$.

On se donne $F \subseteq S$ un ensemble d'états équitables.

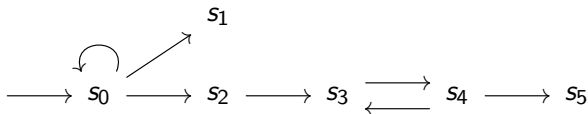
Alors toute exécution σ doit être telle que $\text{Inf}_S(F, \sigma)$.

F est récurrent dans σ , i.e. σ contient une infinité d'états dans F (cas σ infini), ou le dernier état de σ est dans F (cas σ fini).

Remarque : l'ensemble F est récurrent, pas nécessairement chaque élément de F . Pour $\mathcal{S} \triangleq i = 0 \wedge \square((i' = i + 1) \vee (i' = i))$, si on se donne $F \triangleq \{i \% 2 = 0\}$, les exécutions $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2^\omega$ et $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \dots$ sont valides.



Exemple - équité simple

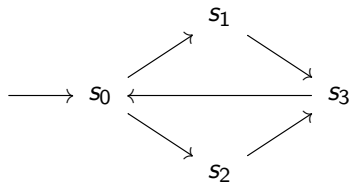


$$\begin{aligned} \text{Exec}(S) = & \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ & \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle \end{aligned}$$

Équité simple	Exécutions
$\{s_0\}$	$\langle s_0^\omega \rangle$
$\{s_1, s_4\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle$
$\{s_1, s_5\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$



Exemple - équité simple



On fixe : équité simple sur $\{s_1\}$.

légale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

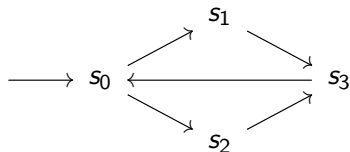
légale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

illégale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

légale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^*)^\omega \rangle$



Exemple - équité simple



$Exec(S) =$

Équité simple	
$\{s_1\}$	
$\{s_1, s_2\}$	



Équité multiple sur les états



Équité multiple

Soit un système de transition $\langle S, I, R \rangle$.

On se donne un ensemble dénombrable, indexable par un ensemble d'entiers $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, d'ensembles équitables $\{F_i\}_{i \in J}$.

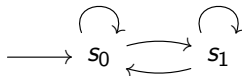
Toute exécution σ doit être telle que $\forall i \in J : \text{Inf}_S(F_i, \sigma)$.

Exécutions vérifiant l'équité multiple = **intersection** des exécutions vérifiant l'équité simple sur chacun des F_i .

\Rightarrow l'équité simple est un cas particulier de l'équité multiple.



Exemple - équité multiple



$Exec(S) =$

Équité simple/multiple	
$\{s_0\}$	
$\{s_0, s_1\}$	
$\{s_0\}\{s_1\}$	

Équivalence équité multiple finie \leftrightarrow simple



Cas simple : J est fini. $|J|$ est la cardinalité de J .

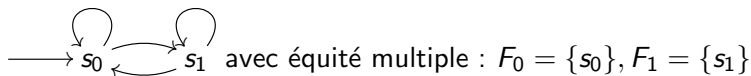
Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent (égalité des exécutions projetées sur S) :

- $S' = S \times J$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{(\langle s, j \rangle, \langle s', j + 1 \bmod |J| \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \in F_j\} \cup \{(\langle s, j \rangle, \langle s', j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \notin F_j\}$
- Équité simple $F' = F_0 \times \{0\}$

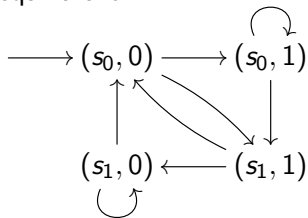
Le premier ensemble de R' est pour le cas où on visite un état de F_j et on cherche donc à visiter l'ensemble suivant ; le deuxième ensemble est pour le cas où on n'est pas en train de visiter un état de F_j , que l'on continue à attendre.



Exemple équité multiple



ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur $\{(s_0, 0)\}$

Équivalence équité multiple \leftrightarrow simple



Cas général (J potentiellement infini).

Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times J \times J$
- $I' = I \times \{0\} \times \{0\}$
- $R' =$

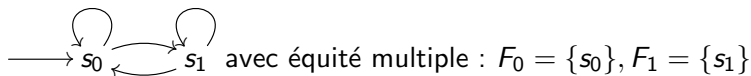
$$\begin{aligned} & \{(\langle s, i, i \rangle, \langle s', i \oplus 1, 0 \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \in F_i\} \\ & \cup \{(\langle s, i, j \rangle, \langle s', i, j+1 \rangle) \mid j < i \wedge (s, s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ & \cup \{(\langle s, i, j \rangle, \langle s', i, j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{aligned}$$
- Équité simple $F' = F_0 \times J \times \{0\}$

avec : $i \oplus 1 \triangleq \begin{cases} i + 1 & \text{si } J \text{ est infini} \\ i + 1 \bmod |J| & \text{sinon} \end{cases}$

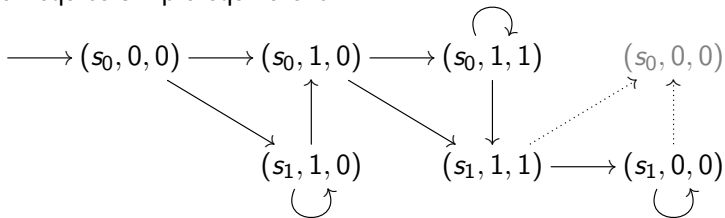
Dans une exécution équitable, les compteurs i, j forment un triangle :
 $\langle (0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 0) \rightarrow \dots \rangle$



Exemple équité multiple



ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur $\{(s_0, 0, 0), (s_0, 1, 0)\}$

Équité conditionnelle sur les états



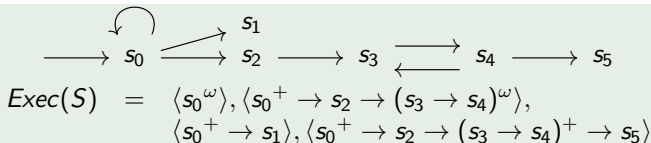
Équité conditionnelle

Soit un système de transition $\langle S, I, R \rangle$.

On se donne deux ensembles F et G .

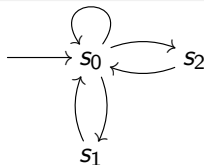
Toute exécution σ doit être telle que $\text{Inf}_S(F, \sigma) \Rightarrow \text{Inf}_S(G, \sigma)$.

Si F est récurrent dans σ , alors G doit être récurrent dans σ .



Équité cond.	Exécutions
$\{s_0\} \Rightarrow \{s_5\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{s_3\} \Rightarrow \{s_4\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$

Exemple - équité conditionnelle



$Exec(S) =$

Équité cond.	
$\{s_1\} \Rightarrow \{s_2\}$	

Équivalence équité conditionnelle \leftrightarrow simple



Soit un système $\langle S, I, R \rangle$ avec équité conditionnelle $F \Rightarrow G$.
Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent :

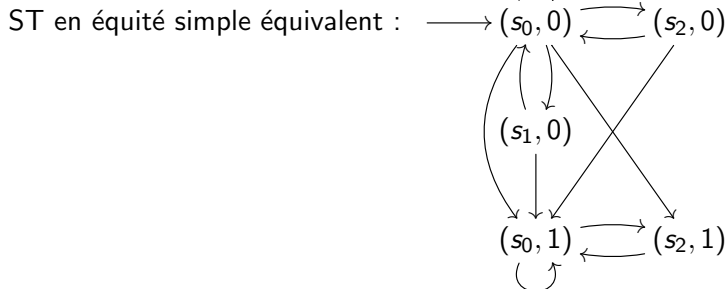
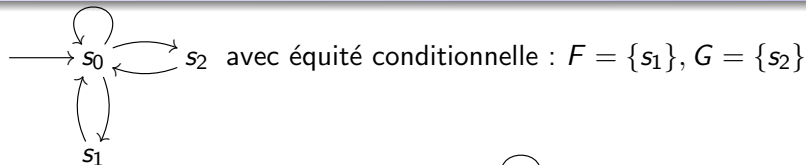
- $S' = (S \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \begin{aligned} &\{(\langle s, 0 \rangle, \langle s', 0 \rangle) \mid (s, s') \in R\} \\ &\cup \{(\langle s, 0 \rangle, \langle s', 1 \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s' \in (S \setminus F)\} \\ &\cup \{(\langle s, 1 \rangle, \langle s', 1 \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s, s' \in (S \setminus F)\} \end{aligned}$
- Équité simple $F' = (G \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$

Les états $\langle s, 0 \rangle$, identiques au système d'origine, correspondent aux exécutions où G doit être infiniment souvent visité.

Les états $\langle s, 1 \rangle$, restreints aux états non dans F , correspondent aux exécutions où F ne doit plus jamais être visité.



Exemple équité conditionnelle



Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
 - Équité simple
 - Équité multiple
 - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
 - Équité faible
 - Équité forte
 - Équité sur les étiquettes



Équité sur les transitions



L'équité sur les transitions est plus précise que l'équité sur les états. Informellement, une exécution infinie est **non équitable** vis-à-vis d'une transition si :

- la transition n'apparaît qu'un nombre fini de fois,
- et la transition est continûment faisable (équité faible) ou infiniment souvent faisable (équité forte).

Les définitions suivantes sont correctes aussi bien pour les exécutions infinies que pour les exécutions finies maximales. Pour autant, les explications sont plus faciles sur les exécutions infinies. Le bégaiement est présent par défaut dans TLA^+ et dans la majorité des méthodes outillées s'appuyant sur les systèmes de transition, ce qui justifie cette simplification.



Équité faible sur les transitions



Équité faible

Soit un ST $\langle S, I, R \rangle$ et $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions.
 F est faiblement équitable ssi dans toute exécution σ :

$$\text{Inf}_S(S \setminus \text{dom}(F), \sigma) \vee \text{Inf}_T(F, \sigma)$$

(l'ensemble d'états $S \setminus \text{dom}(F)$ est récurrent,
ou l'ensemble de transitions F est récurrent)

Ou, de manière équivalente :

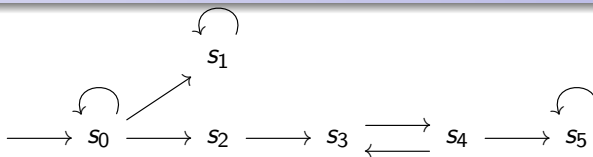
$$\neg \text{Inf}_S(S \setminus \text{dom}(F), \sigma) \Rightarrow \text{Inf}_T(F, \sigma)$$

(si l'ensemble d'états $S \setminus \text{dom}(F)$ n'est pas récurrent,
alors l'ensemble de transitions F est récurrent)

L'équité faible exprime que l'on n'a pas le droit de rester indéfiniment dans un ensemble spécifié d'états alors qu'il existe toujours une transition en équité faible qui est exécutable.



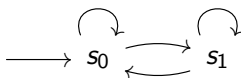
Exemple - équité faible



$$\begin{aligned} \text{Exec}(S) = & \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ & \langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle \end{aligned}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle$
$\{(s_0, s_1), (s_0, s_0)\}$	<i>toutes</i>
$\{(s_4, s_5)\}$	<i>toutes</i>

Exemple - équité faible

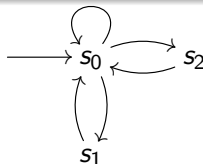


$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_1^{\omega} \rangle
 \end{aligned}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle,$ $\langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_1^{\omega} \rangle$
$\{(s_0, s_0)\}$	<i>toutes</i>
$\{(s_0, s_0), (s_0, s_1)\}$	<i>toutes</i>



Exemple - équité faible

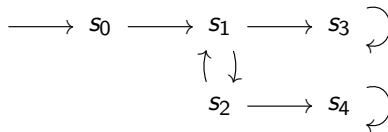


On note $T \triangleq s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^* \setminus \langle \rangle$.
(le $\setminus \langle \rangle$ garantit que T ne contient pas la séquence vide)

$$Exec(S) = \langle T^\omega \rangle$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_2)\}$	$\langle T^* \rightarrow (s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^+)^\omega \rangle,$ $\langle T^* \rightarrow (s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^+)^\omega \rangle$

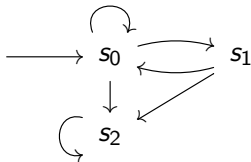
Exemple - équité faible



$Exec(S) =$

Équité faible	
$\{(s_2, s_4)\}$ $\{(s_2, s_4), (s_1, s_3)\}$	

Exemple - équité faible



$Exec(S) =$

Équité faible	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_2), (s_1, s_2)\}$	

Équité faible \rightarrow équité simple sur les états



Soit un système $\langle S, I, R \rangle$ avec équité faible sur F .

Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 1 \rangle \mid (s, s') \in R \cap F \}$
 $\cup \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 0 \rangle \mid (s, s') \in R \setminus F \}$
- Équité simple $F' = S \setminus \text{dom}(F) \times \{0, 1\} \cup S \times \{1\}$

Les états $\langle s, 1 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F , les états $\langle s, 0 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F .



Équité forte sur les transitions



Équité forte

Soit un ST $\langle S, I, R \rangle$ et $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions.
 F est fortement équitable ssi dans toute exécution σ :

$\neg \text{Inf}_S(\text{dom}(F), \sigma) \vee \text{Inf}_T(F, \sigma)$
l'ensemble d'états $\text{dom}(F)$ n'est pas récurrent,
ou l'ensemble de transitions F est récurrent.

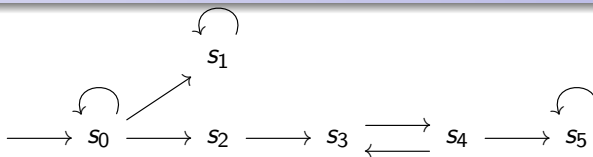
Ou, de manière équivalente :

$\text{Inf}_S(\text{dom}(F), \sigma) \Rightarrow \text{Inf}_T(F, \sigma)$
si l'ensemble d'états $\text{dom}(F)$ est récurrent,
alors l'ensemble de transitions F est récurrent.

L'équité forte exprime que si l'on passe infiniment souvent dans un ensemble d'états où des transitions de r sont exécutables, alors une transition de r finit par être exécutée.



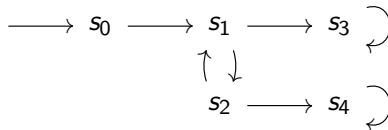
Exemple - équité forte



$$\begin{aligned} \text{Exec}(S) = & \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ & \langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle \end{aligned}$$

Équité forte	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$
$\{(s_4, s_5)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle$
$\{(s_3, s_4), (s_4, s_5)\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle$
	<i>toutes</i>

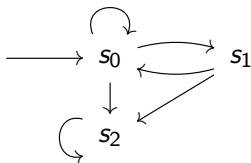
Exemple - équité forte



$Exec(S) =$

Équité forte	
$\{(s_2, s_4)\}$	

Exemple - équité forte



$Exec(S) =$

Équité forte	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$	

Équité forte \rightarrow équité conditionnelle sur les états



Soit un système $\langle S, I, R \rangle$ avec équité forte sur F .
Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité conditionnelle suivant est équivalent :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 1 \rangle \mid (s, s') \in R \cap F \}$
 $\cup \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 0 \rangle \mid (s, s') \in R \setminus F \}$
- Équité conditionnelle $F' = \text{dom}(F) \times \{0, 1\}$
 $G' = S \times \{1\}$

Les états $\langle s, 1 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F , les états $\langle s, 0 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F .

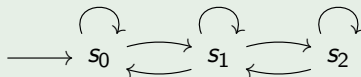


Combinaisons d'équités faibles/fortes

En pratique, on se donne

- plusieurs ensembles de transitions en équité faible,
- plusieurs ensembles de transitions en équité forte.

Le système doit respecter toutes ces contraintes (la conjonction).



Équité faible sur $\{(s_0, s_1)\}$ (interdit le bégaiement à l'infini)

Équité faible sur $\{(s_1, s_2)\}$ (idem)

Équité faible sur $\{(s_2, s_1)\}$ (idem)

Équité forte sur $\{(s_1, s_2)\}$ (interdit de ne jamais aller en s_2)

Ici, équivalent à équité multiple sur $\{\{s_1\}, \{s_2\}\}$: toute exécution où s_1 et s_2 apparaissent infiniment souvent.

Équité sur les étiquettes

Dans le cas d'un système de transition étiqueté, on peut également définir l'équité (faible ou forte) sur un ensemble d'étiquettes $F \subseteq L$. Cela revient à l'équité sur les transitions $Etq^{-1}(F)$.



Conclusion

- L'équité contraint des états / des transitions à être visité(e)s infiniment souvent.
- Les contraintes d'équité éliminent les exécutions non équitables, jugées sans intérêt.
- On utilise plutôt l'équité sur les transitions qui traduit que, si une action est toujours / infiniment souvent faisable, elle aura lieu : le système n'est pas injuste vis-à-vis de ces actions.

