Sixième partie

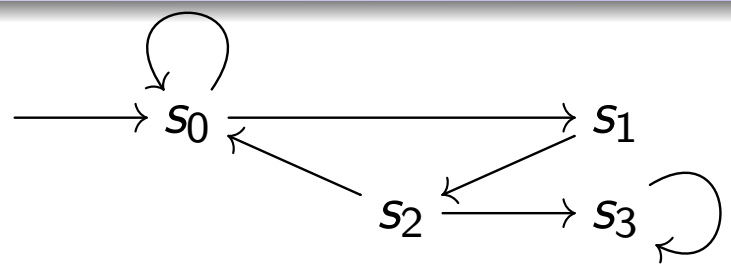
CTL – logique temporelle arborescente

Plan

1. CTL
   - Syntaxe
   - Sémantique
2. Expressivité
   - Exemples
   - Propriétés classiques

Ensemble des exécutions vs arbre des exécutions

Soit le système de transition :

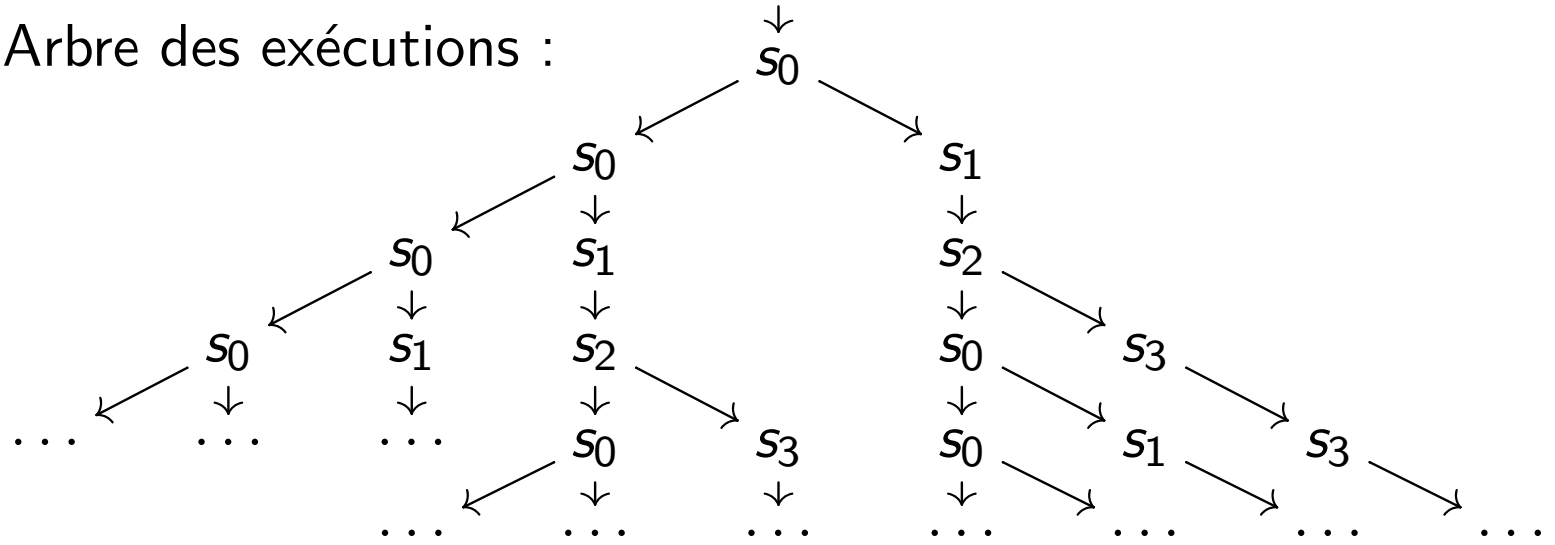


Ensemble des exécutions :

$$\langle (s_0{}^+ \to s_1 \to s_2)^* \to s_0{}^\omega \rangle, \langle (s_0{}^+ \to s_1 \to s_2)^\omega \rangle, \langle (s_0{}^+ \to s_1 \to s_2)^+ \to s_3{}^\omega \rangle$$

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{l} s_0 \to s_0 \to \cdots, s_0 \to s_1 \to s_2 \to s_0 \to s_0 \to \cdots, \\ s_0 \to s_1 \to s_2 \to s_0 \to \cdots, s_0 \to s_0 \to s_1 \to s_2 \to s_0 \to \cdots, \ldots \\ s_0 \to s_1 \to s_2 \to s_3 \to s_3 \to \cdots, \ldots \end{array} \right\}$$

Arbre des exécutions :



Computational Tree Logic – logique temporelle arborescente

Modèles

Une formule CTL se rapporte toujours à un état donné s d'un système, duquel partent des traces $Traces(s)$.
Les états de S constituent les modèles de cette logique.

La différence (syntaxiquement parlant) avec LTL réside dans l'apparition dans les opérateurs temporels de quantificateurs de traces.

Syntaxe de la CTL

♪♪♪

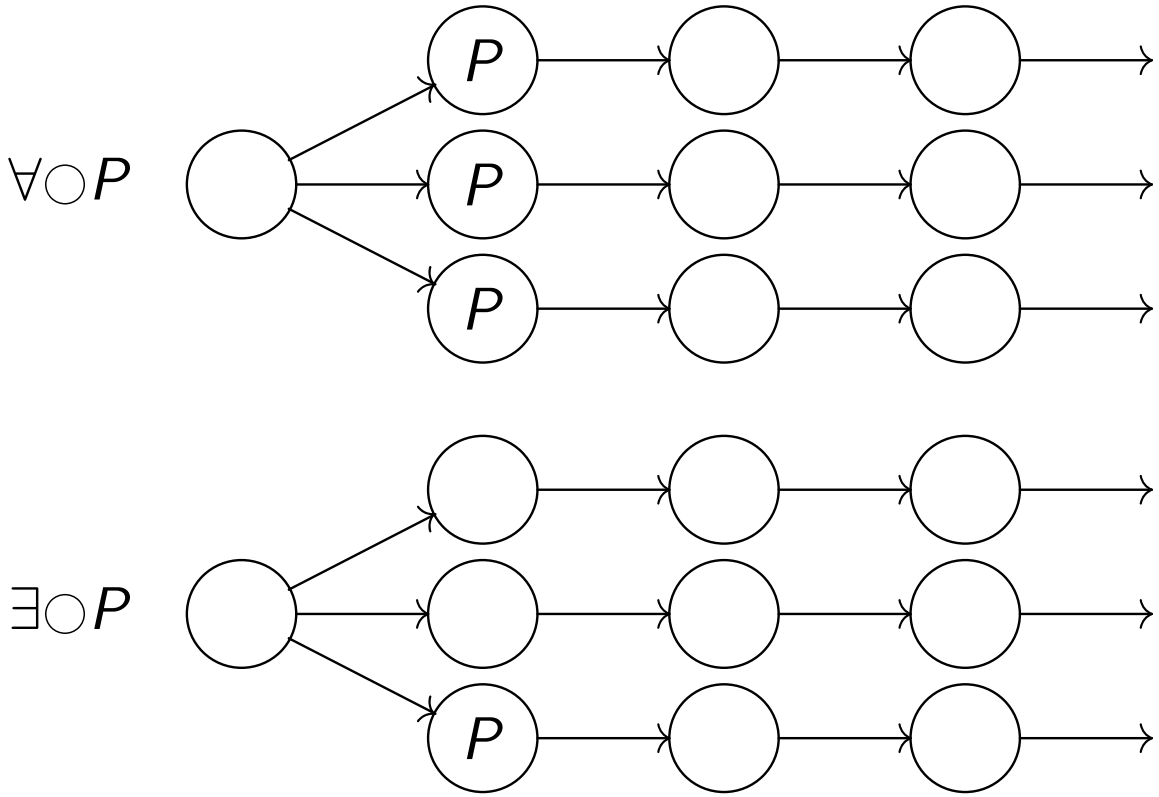
Quantification universelle

formule	interprétation (pour s un état) pour toute trace partant de s
$\forall \bigcirc P$	P est vrai à l'instant suivant
$\forall \Box P$	P est toujours vrai à chaque état
$\forall \Diamond P$	P finit par être vrai (dans le futur)
$P \forall \mathcal{U} Q$	Q finit par être vrai, et en attendant P reste vrai

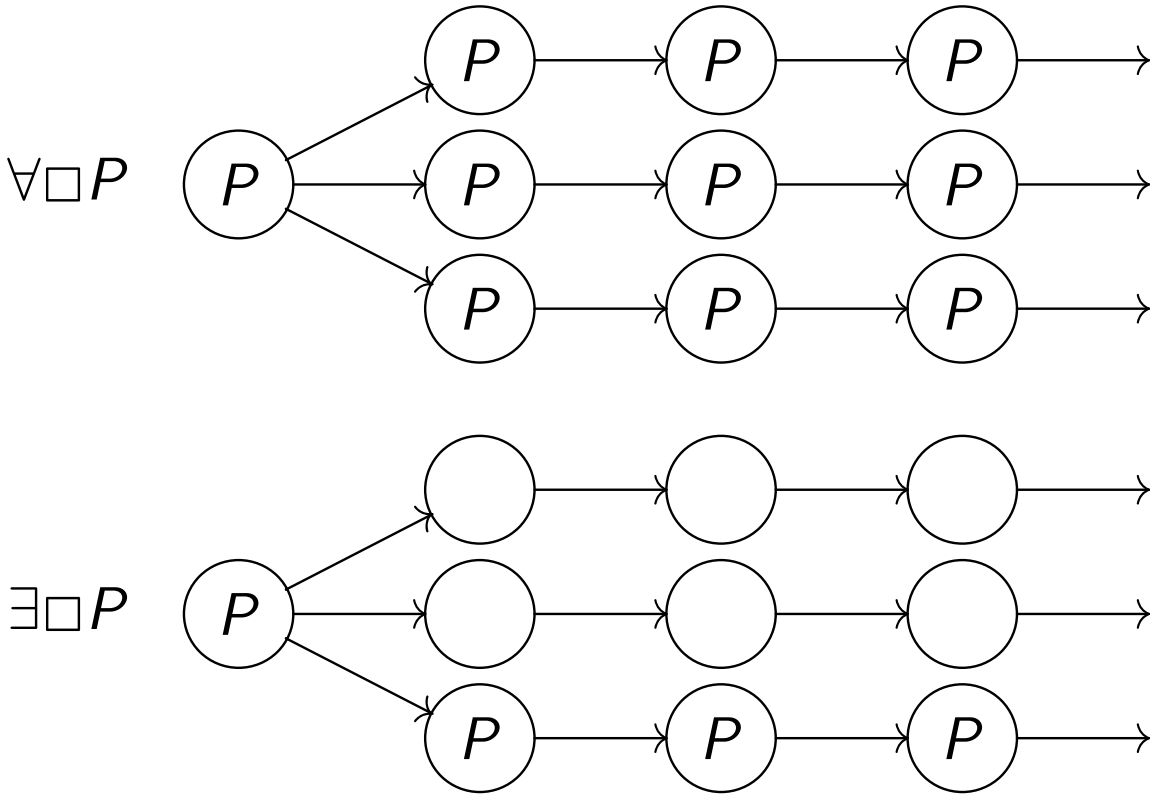
Quantification existentielle

formule	interprétation (pour s un état) pour au moins une trace partant de s
$\exists \bigcirc P$	P est vrai à l'instant suivant
$\exists \Box P$	P est toujours vrai à chaque état
$\exists \Diamond P$	P finit par être vrai (dans le futur)
$P \exists \mathcal{U} Q$	Q finit par être vrai, et en attendant P reste vrai

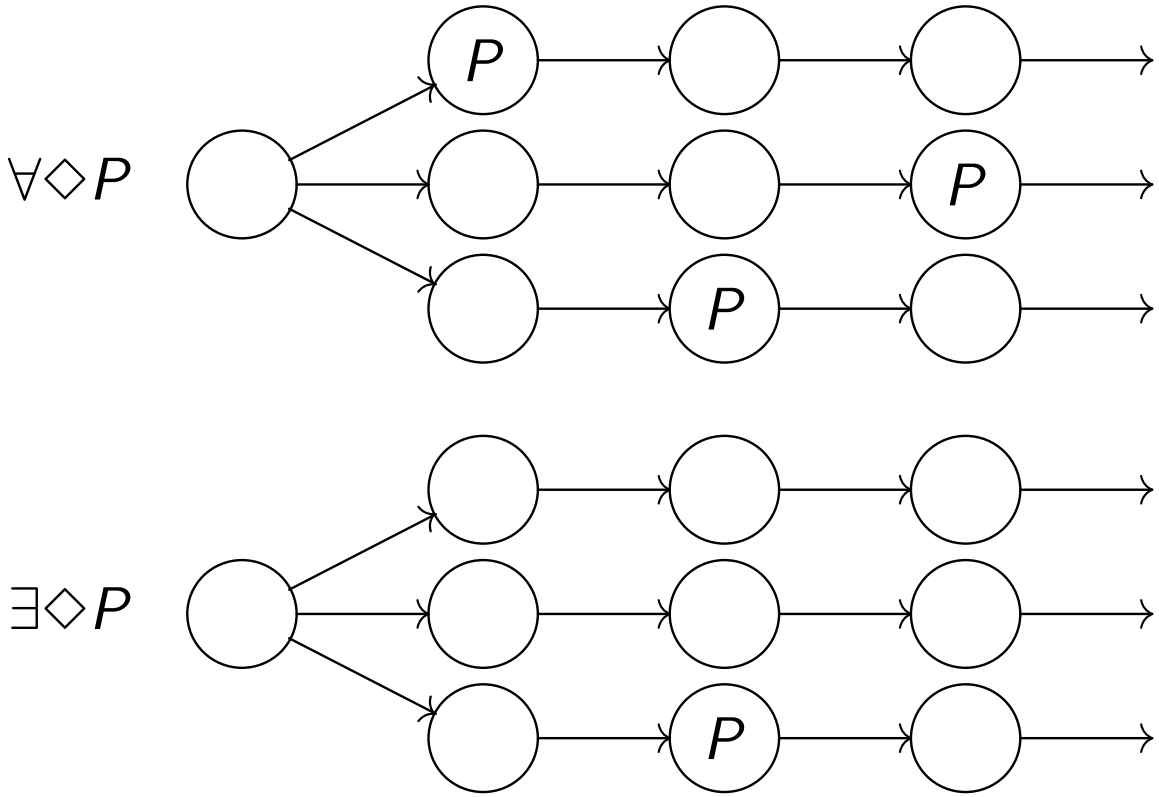
Intuition sémantique $\forall\bigcirc$, $\exists\bigcirc$



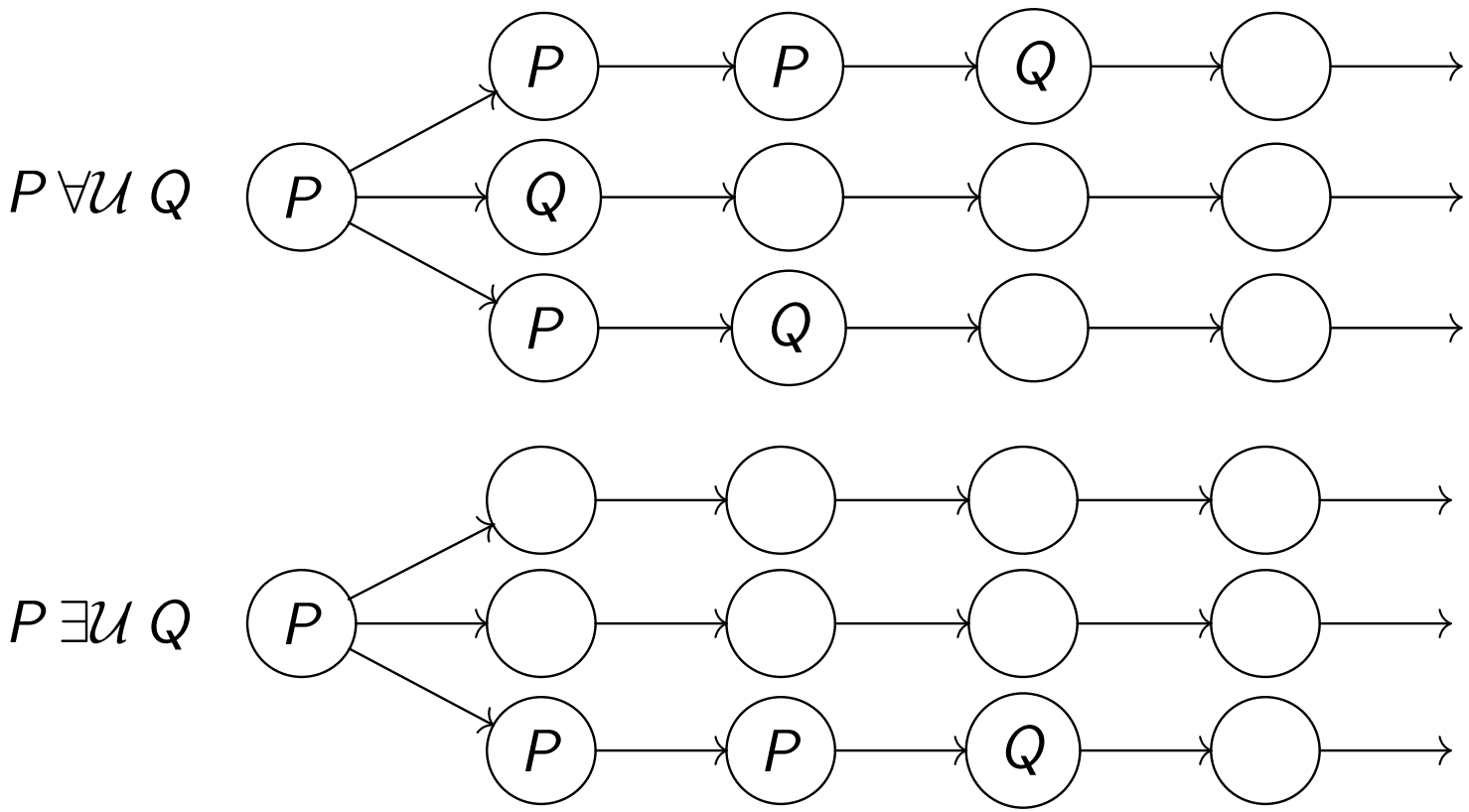
Intuition sémantique $\forall\Box$, $\exists\Box$



Intuition sémantique $\forall\Diamond$, $\exists\Diamond$



Intuition sémantique $\forall\mathcal{U}$, $\exists\mathcal{U}$



Opérateurs minimaux

Un ensemble d'opérateurs minimaux est $\forall\bigcirc$, $\forall\mathcal{U}$ et $\exists\mathcal{U}$:

- $\exists\bigcirc P \triangleq \neg\forall\bigcirc\neg P$
- $\forall\Diamond P \triangleq \mathit{True}\,\forall\mathcal{U}\,P$
- $\exists\Diamond P \triangleq \mathit{True}\,\exists\mathcal{U}\,P$
- $\forall\Box P \triangleq \neg\exists\Diamond\neg P$
- $\exists\Box P \triangleq \neg\forall\Diamond\neg P$

(autres ensembles minimaux : $\{\exists\bigcirc, \exists\Box, \exists\mathcal{U}\}$ ou $\{\forall\Diamond, \exists\mathcal{U}, \exists\bigcirc\}$)

Syntaxe alternative

Syntaxe alternative

On trouve très fréquemment une autre syntaxe :

$\forall \quad \leftrightarrow$ A (all)
$\exists \quad \leftrightarrow$ E (exists)
$\Box \quad \leftrightarrow$ G (globally)
$\Diamond \quad \leftrightarrow$ F (finally)
$\bigcirc \quad \leftrightarrow$ X (next)

Par exemple :

$\forall\Box\exists\Diamond P \leftrightarrow$ AG EF P
$f \,\forall\mathcal{U}\, g \leftrightarrow$ A(f U g)

Opérateur complémentaire waiting-for ♪♪♪

$P \,\exists\mathcal{W}\, Q \triangleq \exists\Box P \vee P \,\exists\mathcal{U}\, Q$
$P \,\forall\mathcal{W}\, Q \not\triangleq \forall\Box P \vee P \,\forall\mathcal{U}\, Q$ – *trop fort*
$\triangleq \neg(\neg Q \,\exists\mathcal{U}(\neg P \wedge \neg Q))$

Sémantique (système)

La relation de validation sémantique ne fait intervenir que l'état courant.

Vérification par un système

Un système $\mathcal{S} = \langle S, \{s_0\}, R \rangle$ vérifie (valide) la formule F ssi l'état initial de $\mathcal{S}$ la valide :

$$\frac{s_0 \models F}{\mathcal{S} \models F}$$

(la sémantique est moins claire s'il y a plusieurs états initiaux, du fait de l'opérateur $\exists$: pour tous les états initiaux, ou pour au moins un ? En pratique, on peut toujours se ramener à un seul état initial, donc on évite la difficulté)

Sémantique (opérateurs logiques)

$$\frac{}{s \models s}$$

$$\frac{s \models P \quad s \models Q}{s \models P \wedge Q}$$

$$\frac{s \models P}{s \models P \vee Q} \qquad \frac{s \models Q}{s \models P \vee Q}$$

$$\frac{s \models P}{s \not\models \neg P}$$

Sémantique (opérateurs temporels)

(rappel : pour une trace σ, σ_i est le i-ième élément de σ en commençant à 0, et pour un état s, $\mathit{Traces}(s)$ est l'ensemble des traces issues de s)

$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \sigma_1 \models P}{s \models \forall \bigcirc P}$$

$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists j \geq 0 : \sigma_j \models Q \wedge \forall i < j : \sigma_i \models P}{s \models P \, \forall \mathcal{U} \, Q}$$

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists j \geq 0 : \sigma_j \models Q \wedge \forall i < j : \sigma_i \models P}{s \models P \, \exists \mathcal{U} \, Q}$$

Sémantique (opérateurs temporels dérivés)

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \sigma_1 \models P}{s \models \exists \bigcirc P}$$

$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \forall i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \forall \Box P}$$

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \forall i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \exists \Box P}$$

$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \forall \Diamond P}$$

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \exists \Diamond P}$$

Négation

Négation

Contrairement à LTL, pour toute propriété CTL, on a :
soit $\mathcal{S} \models F$, soit $\mathcal{S} \models \neg F$,
et $\mathcal{S} \not\models F \equiv \mathcal{S} \models \neg F$.

Négation des formules $\forall, \exists, \Box, \Diamond$

La négation d'une formule à base de $\forall, \exists, \Box, \Diamond$ se fait simplement en inversant chaque opérateur pour son dual.

exemples :
$\neg(\forall\Diamond\exists\Box p) = \exists\Box\forall\Diamond\neg p$
$(\forall\Diamond\neg s_0 \Rightarrow \forall\Diamond s_3) = (\exists\Box s_0 \vee \forall\Diamond s_3)$ car $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$

Définition par point-fixe

Une fois définis $\exists\bigcirc$ et $\forall\bigcirc$, chaque opérateur est le plus petit point fixe de sa définition inductive :

$$\begin{aligned}
\forall\Box f &= f \wedge \forall\bigcirc\forall\Box f \\
\exists\Box f &= f \wedge \exists\bigcirc\exists\Box f \\
\forall\Diamond f &= f \vee \forall\bigcirc\forall\Diamond f \\
\exists\Diamond f &= f \vee \exists\bigcirc\exists\Diamond f \\
f \,\forall\mathcal{U}\, g &= g \vee (f \wedge \forall\bigcirc(f \,\forall\mathcal{U}\, g)) \\
f \,\exists\mathcal{U}\, g &= g \vee (f \wedge \exists\bigcirc(f \,\exists\mathcal{U}\, g))
\end{aligned}$$

(surtout utile pour l'implantation d'un vérificateur de modèles)

Plan

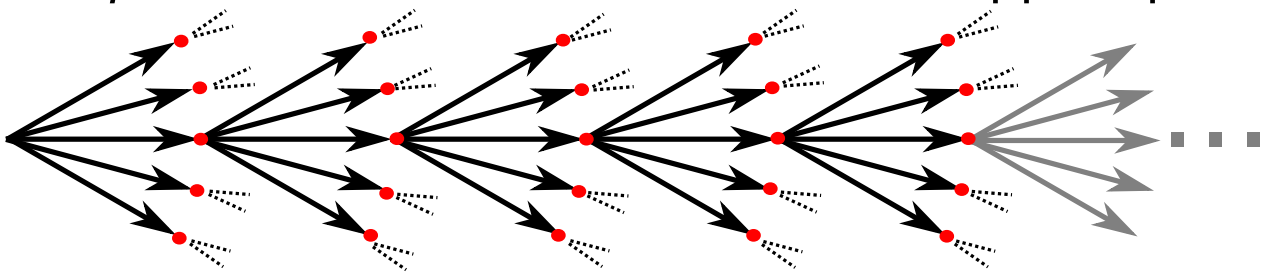
1 CTL
- Syntaxe
- Sémantique

2 Expressivité
- Exemples
- Propriétés classiques

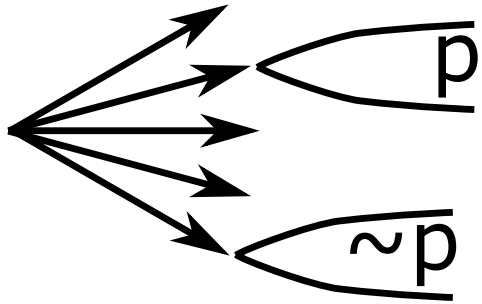
Exemples amusants

♪♪♪

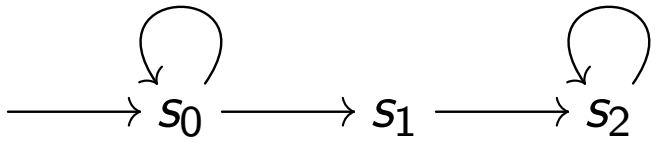
- $\exists\Box\ \forall\bigcirc\ p$: une exécution avec une “enveloppe” qui vérifie p



- $\exists\bigcirc\ \forall\Box p\ \wedge\ \exists\bigcirc\ \forall\Box\neg p$
  un état successeur à partir duquel p est toujours et partout vrai,
  et un état successeur à partir duquel $\neg p$ est toujours et partout vrai



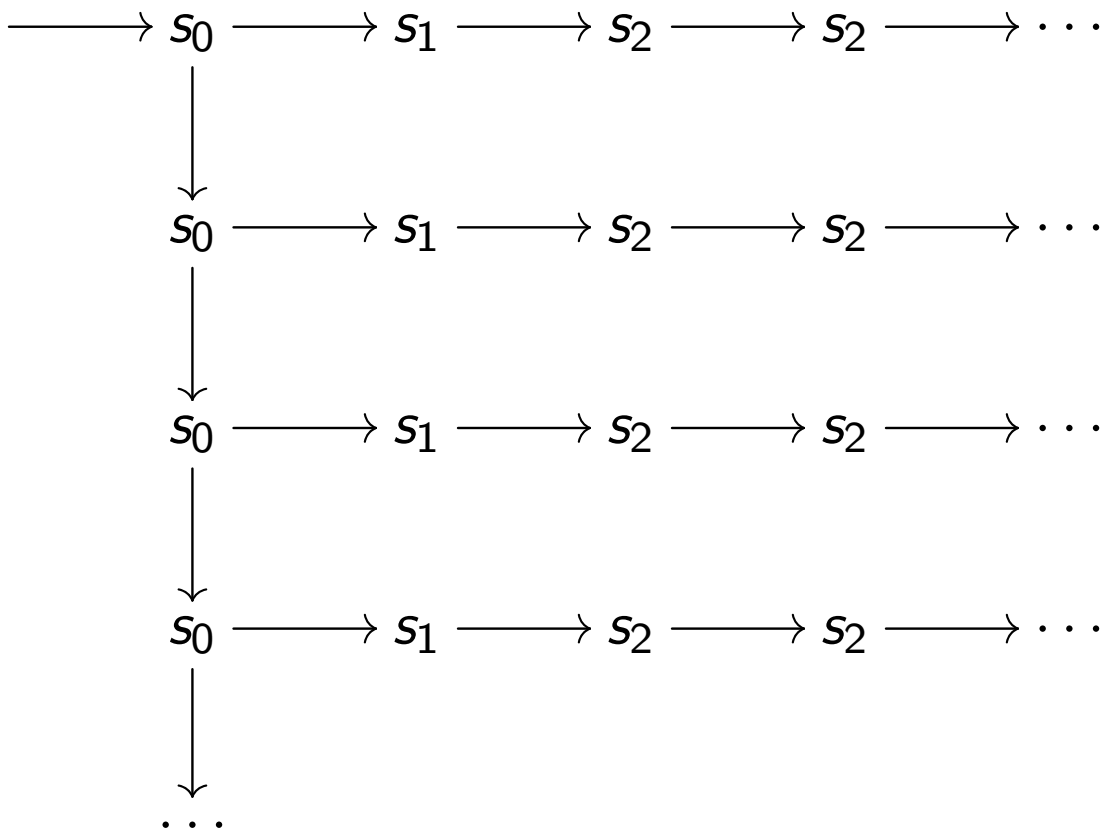
Exemple



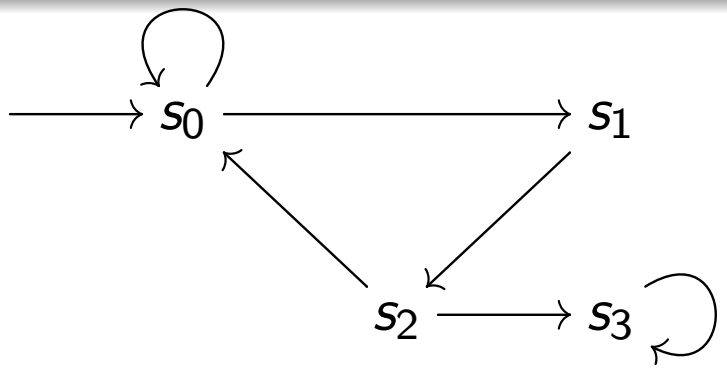
	pas d'équité	équité faible (s_0, s_1)
$s_0 \wedge \forall\bigcirc s_0$		
$s_0 \wedge \exists\bigcirc s_0$		
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \exists\bigcirc s_0)$		
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \exists\Diamond s_2)$		
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \forall\Diamond s_2)$		
$\exists\Diamond\neg s_0$		
$\forall\Diamond\neg s_0$		
$\forall\Box\exists\Diamond s_2$		
$\forall\Box\forall\Diamond s_2$		
$\forall\Diamond\exists\Diamond s_1$		
$\forall\Box\exists\Diamond s_1$		

Exemple - Arbre des exécutions

Arbre des exécutions du système de transition précédent



Exemple 2



	pas d'équité	faible (s_0, s_1)	forte (s_2, s_3)	forte (s_2, s_3) faible (s_0, s_1)
$\exists\Box s_0$				
$\forall\Box\exists\Diamond s_3$				
$\forall\Box\forall\Diamond s_3$				
$\forall\Diamond\forall\Box s_3$				
$\exists\Box s_0 \vee \forall\Diamond s_3$				
$\forall\Diamond\neg s_0 \Rightarrow \forall\Diamond s_3$				

Invariance, Possibilité

Invariance

Spécifier un sur-ensemble des états accessibles d'un système :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box P$$

où P est un prédicat d'état.

Stabilité

Spécifier la stabilité d'une situation si elle survient :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow \forall\Box P)$$

où P est un prédicat d'état.

Possibilité

Spécifier qu'il est possible d'atteindre un état vérifiant P :

$$\mathcal{S} \models \exists\Diamond P$$

Possibilité complexe

Séquence

Spécifier qu'un scénario d'exécution $\langle s_1 \to s_2 \to \ldots \to s_n \rangle$ est possible.

$$\mathcal{S} \models s_1 \wedge \exists\bigcirc(s_2 \wedge \ldots \wedge \exists\bigcirc(s_{n-1} \wedge \exists\bigcirc s_n)\ldots)$$

Réinitialisabilité

Spécifier que quelque soit l'état courant, il est possible de revenir dans un des états initiaux (définis par le prédicat I).

$$\mathcal{S} \models \forall\Box\exists\Diamond I$$

Possibilité arbitraire

Spécifier que si P devient vrai, il est toujours possible (mais pas nécessaire) que Q le devienne après.

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow \exists\Diamond Q)$$

Client/serveur

Réponse

Spécifier qu'un système (jouant le rôle d'un serveur) répond toujours (Q) à une requête donnée (P) :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow \forall\Diamond Q)$$

Stabilité d'une requête

Spécifier que la requête P d'un système (jouant le rôle d'un client) est stable tant qu'il n'y a pas de réponse favorable Q :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow P \,\forall\mathcal{W}\, Q)$$

Combinaisons

♪♪♪

Infiniment souvent

Spécifier que P est infiniment souvent vrai dans toute exécution :

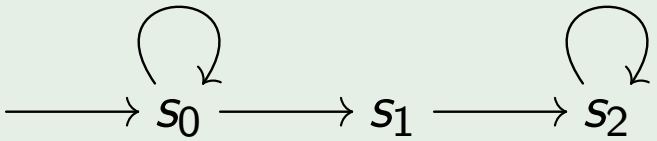
$$\mathcal{S} \models \forall\Box\forall\Diamond P$$

Finalement toujours

Spécifier que P finit par rester définitivement vrai :

impossible ! $\mathcal{S} \models \forall\Diamond\forall\Box P$ ne convient pas (trop fort)

Soit $S =$



en LTL : $S \models \Diamond\Box(s_0 \vee s_2)$

mais CTL : $S \not\models \forall\Diamond\forall\Box(s_0 \vee s_2)$

(tant qu'on est en s_0, on *peut* passer en s_1 : $S \models \forall\Diamond\exists\Diamond s_1$)

Note : $\mathcal{X}\mathcal{X}P = \mathcal{X}P$ pour $\mathcal{X} \in \{\forall\Box, \exists\Box, \forall\Diamond, \exists\Diamond\}$

Spécification d'un ST

Si on utilise une description en intention, et si l'on remplace l'utilisation de l'opérateur $\forall\bigcirc$ par les variables primées, alors on peut spécifier toutes les exécutions permises par un système $\langle S, I, R\rangle$:

$$\mathcal{S} \models I \wedge \forall\Box R$$

L'utilisation de variables primées n'est pas nécessaire mais simplifie les formules.
Par exemple $P(x, x')$ est équivalent à la formule :
$\forall v : x = v \Rightarrow \forall\bigcirc P(v, x)$
qui nécessite une quantification sur une variable.

Comparaison CTL vs. LTL

Contrairement à CTL, les opérateurs temporels LTL parlent tous de la même trace. Les combinaisons de connecteurs temporels ont parfois des sens (subtilement) différents.

	CTL	LTL
$\forall P$, nécessairement P ou $\neg P$	$\mathcal{S} \models P \vee \mathcal{S} \models \neg P$	~~$\mathcal{S} \models P \vee \mathcal{S} \models \neg P$~~
négation	$S \models \neg P \equiv S \not\models P$	~~$S \models \neg P \equiv S \not\models P$~~
l'un de P ou Q inévitable	~~$\mathcal{S} \models \forall\Diamond P \vee \forall\Diamond Q$~~ $\mathcal{S} \models \forall\Diamond(P \vee Q)$	$\mathcal{S} \models \Diamond P \vee \Diamond Q$
l'un de P ou Q continu	~~$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \vee Q)$~~ ~~$\mathcal{S} \models \forall\Box P \vee \forall\Box Q$~~	$\mathcal{S} \models \Box P \vee \Box Q$
$\neg P$ transitoire	~~$\mathcal{S} \models \forall\Diamond\forall\Box P$~~	$\mathcal{S} \models \Diamond\Box P$
répétition	~~$S \models \forall\Diamond(P \wedge \forall\bigcirc P)$~~	$S \models \Diamond(P \wedge \bigcirc P)$
possibilité	$S \models \exists\Diamond P$	~~$S \models \Diamond P$~~

Conséquence : l'équité n'est pas exprimable en CTL. Mais on peut vérifier des propriétés CTL sur un ST avec contraintes d'équité.

Comparaison LTL vs. CTL

Linear Time Logic

+ Intuitive
– . . .sauf la négation
+ Suffisante pour décrire un système de transition
+ y compris l'équité
– Vérification exponentielle en le nombre d'opérateurs temporels

Computational Tree Logic

– Expressivité parfois déroutante
+ Propriétés de possibilité (p.e. réinitialisabilité)
+ Suffisante pour décrire un système de transition
– . . .sauf l'équité non exprimable (mais utilisable)
+ Vérification linéaire en le nombre d'opérateurs temporels

Au-delà : CTL*

CTL* autorise tout mélange des quantificateurs de traces $\forall, \exists$ et d'états $\Box, \Diamond, \bigcirc, \mathcal{U}$.

Exemple : $\exists((\Box\Diamond P) \wedge (\Diamond Q)) =$ il existe une exécution où P est infiniment souvent vrai, et où Q sera vrai.

CTL* est strictement plus expressif que CTL et LTL. L'usage pratique est rare (hors les fragments correspondant à CTL et LTL).