
Théorème d'Euler : activités et exercices

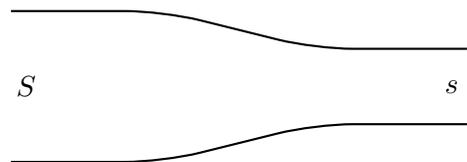
1 Impact d'un jet

Un jet d'eau de section S arrive avec une vitesse \vec{v} sur une plaque placée orthogonalement au jet.

1. Faire un schéma, vu de côté, de la situation.
2. Faire le bilan des forces s'exerçant sur un volume de fluide judicieusement choisi.
3. Grâce au théorème d'Euler, donner la force subie par la paroi de la part du jet.

2 Rétrécissement d'une conduite

Un liquide incompressible (masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$) est en écoulement parfait stationnaire dans une conduite qui se rétrécit, passant de la section S à la section s .



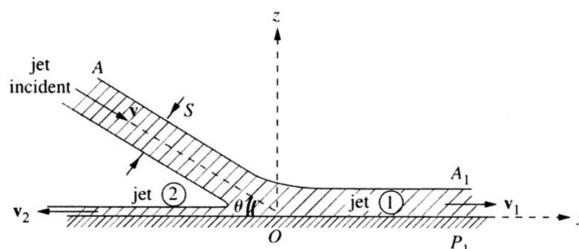
1. Qualitativement, comment est dirigée la force exercée par l'écoulement sur la conduite ? On va chercher à exprimer cette force en fonction des paramètres de l'écoulement.
2. La vitesse est V en amont, quelle est sa valeur v en aval ?
3. Sachant que la pression est P_1 en amont, quelle est sa valeur P_2 en aval ?
4. Que se passe-t-il lorsque V augmente suffisamment ? Donner la valeur V_l pour l'eau, avec $P_1 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$, $S = 1 \text{ cm}^2$ et $s = 0,5 \text{ cm}^2$. On supposera par la suite que la vitesse V reste inférieure à V_l .
5. En faisant un bilan de quantité de mouvement, évaluer la force exercée par le fluide sur la conduite en fonction de P_1 , S , s , V et ρ .
6. Vérifier que la force est bien orientée comme proposé à la première question.

3 Division et déflexion d'un jet

L'écoulement d'un jet d'eau, de vitesse $v = 30 \text{ m/s}$ et de section droite $S = 20 \text{ cm}^2$, de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, est supposé parfait et incompressible. On notera P_0 la pression atmosphérique et on négligera les forces de pesanteur.

1. Division du jet sur une plaque fixe plane

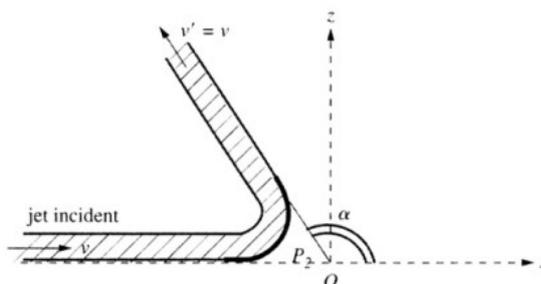
Le jet d'eau incident frappe une plaque horizontale fixe \mathcal{P}_1 , et fait l'angle θ avec cette plaque. Il se divise en deux jets émergents : jet 1 et jet 2, de vitesse de même direction Ox , opposées et parallèles à la plaque \mathcal{P}_1 .



- Montrer que $v_1 = v_2 = v$.
- Pour quelle angle θ le débit du jet 1 est-il trois fois supérieur au débit du jet 2? Calculer, dans ces mêmes conditions, les débits volumiques Q_1 et Q_2 de chacun des jets émergents.
- Calculer, dans ces mêmes conditions, la force F_1 exercée par le liquide sur la plaque.

2. Déflexion du jet par une plaque courbe fixe

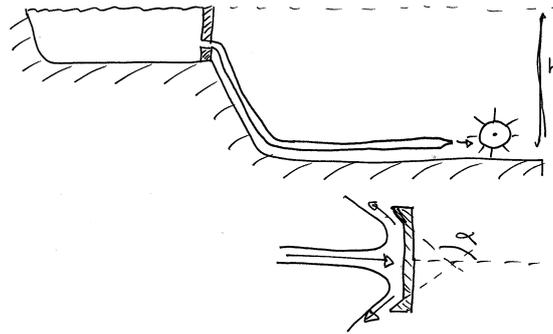
Le même jet d'eau horizontal frappe une plaque courbe \mathcal{P}_2 , qui provoque une déflexion $\alpha = 120^\circ$ du jet ; on admettra que $v' = v$.



- Exprimer les composantes de la force exercée par le liquide sur la plaque \mathcal{P}_2 supposée fixe.
- Calculer F_2 et préciser l'angle que fait la force avec l'horizontale.

4 Turbine hydraulique

Une centrale hydro-électrique est alimentée par une conduite d'eau issue d'un barrage. La capacité du barrage est très grande et l'eau qu'il contient est pratiquement immobile, quel que soit le débit de la conduite. L'extrémité aval de la conduite est raccordée à une tubulure de section décroissante, appelée injecteur, à l'extrémité de laquelle l'eau sort à l'air libre sous forme d'un jet cylindrique, d'axe horizontale, de section circulaire S . La vitesse de l'eau sera supposée horizontale et uniforme en tout point du jet de sortie. Soit h la dénivellation entre la surface libre de l'eau du barrage et l'axe de l'injecteur.



- 1.** On suppose que le fluide est incompressible et parfait. Calculer alors :
- La vitesse v de sortie de l'injecteur.
 - Le débit massique q_m .
 - La puissance P_c transportée sous forme cinétique par le jet relativement au référentiel terrestre (R) supposé Galiléen.
- 2.** A la sortie de l'injecteur, le jet frappe successivement les augets d'une turbine. Les augets sont régulièrement répartis sur la périphérie d'une roue d'axe horizontale perpendiculairement à la direction du jet. Le nombre d'augets étant relativement important, il y a une substitution continue d'augets si bien que l'on considère que l'écoulement est stationnaire. Le rayon de la roue étant assez grand, on peut alors assimiler le déplacement des augets dans la zone d'action du jet à une translation à la vitesse V constante, parallèle au jet.
- Dans le référentiel (R') lié à l'auget, en mouvement de translation à la vitesse V relativement à (R), le jet se sépare symétriquement horizontalement à droite et à gauche. On note respectivement v' , v'_d et v'_g les vitesses relatives par rapport à (R') du jet incident et des deux jets émergents. On pose $\alpha = (v', v'_g)$.
- Montrer que l'on peut considérer que v' , v'_d et v'_g ont même norme.
 - En déduire la force qu'exerce le jet sur l'auget en fonction de q_m , α , v et V .
 - Pour quelles valeurs de α cette force est maximale ?
 - Calculer la puissance mécanique P effectivement reçue par l'auget.
 - Étudier le rendement $\eta = \frac{P}{P_c}$ de la turbine en fonction de V . Calculer V_m la vitesse V donnant le meilleur rendement.
 - Pour $\alpha = 120\text{deg}$ et $V = V_m$, calculer : La force exercée par le jet sur l'auget, la puissance mécanique reçue par la turbine et le rendement de la turbine.

Données : $h = 900\text{m}$, $S = 150\text{cm}^2$, $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$, masse volumique de l'eau : $\rho = 1000\text{kg.m}^{-3}$, masse volumique de l'air : $\rho_a = 1.20\text{kg.m}^{-3}$