

EXPÉRIENCES SUR LA TRAÎNÉE

MÉCANIQUE DES FLUIDES 1A-H - P. CHASSAING

RÉSUMÉ. Cette manipulation vise à illustrer, par un exemple concret, la démarche expérimentale pratiquée classiquement en mécanique des fluides. Elle offre la possibilité de se familiariser avec certains aspects méthodologiques et de mettre en application des techniques et outils d'analyse de portée très générale.

Elle a pour thème le phénomène de résistance aéro/hydrodynamique qui se manifeste sur tout solide immergé dans un fluide réel en mouvement.

Dans une première partie qualitative, on s'attachera à mettre en évidence la composante dite de traînée des efforts exercés sur un solide placé dans un écoulement. Il s'agira, en particulier, de dégager les paramètres susceptibles de fixer la valeur de cette force en exploitant le théorème de Vaschy-Buckingham à la lumière d'observations d'écoulements autour de différents obstacles.

Dans une seconde partie, on cherchera à préciser quantitativement l'expression du coefficient de traînée pour un obstacle donné, en combinant mesures locales de pression et bilan global de quantité de mouvement. On conclura par une discussion sur la comparaison aux résultats connus de la littérature.

Date de(s) version(s): Mai 2006.

Mots clés. Traînée, coefficient de traînée, balance aéro-hydrodynamique, micro-moulinet, théorème de Vaschy-Buckingham, Théorème d'Euler.

TABLE DES MATIÈRES

1. BREF HISTORIQUE SUR LES EFFORTS AÉRO-HYDRODYNAMIQUES	5
2. NOTIONS PREMIERES SUR LA TRAINEE	5
2.1. Manifestation élémentaire	5
2.2. Coefficient de traînée	6
3. LE BANC D'ESSAI	6
3.1. La génération de l'écoulement	6
3.2. Le dispositif de pesée hydrodynamique	7
4. ANALYSE QUALITATIVE	7
4.1. Etude préliminaire	7
4.2. Approfondissement	8
5. ETUDE QUANTITATIVE	8
5.1. Détermination globale de la traînée	8
5.2. Détermination par mesures locales de pression	9
5.3. Dépendance au nombre de Reynolds	9
6. FOURNITURES	11
7. CAHIER DE RÉSULTATS	12
8. QUESTIONS	23
9. COMPLÉMENT 1	27
9.1. Enoncé du théorème de VASCHY-BUCKINGHAM	27
9.2. Mise en pratique	27
10. COMPLÉMENT 2	29
10.1. Objectif du calcul de la traînée par méthode intégrale	29
10.2. Hypothèses générales	29
10.3. Définition du domaine et hypothèses aux frontières	29
10.4. Bilan global de quantité de mouvement : Théorème d'Euler	30

Nomenclature

Symboles généraux

C_x	Coefficient de traînée
D	Dimension transversale caractéristique du corps immergé
e	maître couple de l'obstacle
g	module de l'accélération de la pesanteur
L_1	longueur de la tige verticale de la balance
L_2	longueur de la tige horizontale de la balance
M	masse de pesée de la traînée
M_{eq}	masse d'équilibrage statique de la balance
\vec{n}	vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface
P	Pression
Re	Nombre de Reynolds de l'écoulement
S_{ref}	Surface de référence
S_0, S_1, S_a, S_b	Surfaces limites du domaine de contrôle
\vec{T}_ν	Contrainte locale de viscosité
\vec{T}	Force résultante de traînée
\vec{V}_∞	Vitesse de l'écoulement uniforme à l'infini

Symboles grecs

λ	Rapport d'allongement du cylindre
μ	Viscosité dynamique du fluide
$\nu = \mu/\rho$	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique du fluide
θ	Épaisseur de quantité de mouvement
Δ	Domaine de contrôle

1. BREF HISTORIQUE SUR LES EFFORTS AÉRO-HYDRODYNAMIQUES

L'existence de forces dues au mouvement relatif d'un fluide sur un solide immergé peut être induite de l'observation de phénomènes naturels courants : nage de poissons, vol des oiseaux... Des applications humaines, remontant à une haute antiquité, ont également permis de prendre conscience de la présence de tels efforts dans la mise en oeuvre de certains engins ou techniques tels que roues/ailes de moulins, halage de barges, propulsion/direction de bateaux à voile...

La fin de l'approche empirique séculaire de ces questions peut être située, pour l'Europe, au début du XVIIIème siècle, avec la naissance d'une "science hydrodynamique" grâce aux travaux fondateurs de D. Bernoulli¹ (1738) et L. Euler (1755).

Relativement au calcul des efforts exercés par un fluide s'écoulant sur un obstacle, ces travaux conduisirent à des résultats en contradiction avec l'expérience : Paradoxe de d'Alembert. [QUESTIONS 1-2]

Un siècle plus tard, des équations modélisant de façon plus réaliste le mouvement de fluides réels émergeaient des travaux de M. Navier, (1827), S. D. Poisson (1831), D. de Saint-Venant (1843) et G. G. Stokes (1845). Cependant, la complexité du nouveau modèle ne permettait pas de l'exploiter, à cette époque, pour calculer les efforts sur un obstacle de géométrie non-idéalement simple.

Les travaux de pionniers sur le vol d'engins planants de O. Lilienthal (1892), L.P. Mouillard (1892), O. Chanute (1896) et de L. Prandtl (1904), avec le concept de couche limite, permirent d'apporter les premières réponses opérationnelles aux problèmes de la dynamique du vol.

Ces premières bases de l'aérodynamique expérimentale furent vite complétées par les contributions théoriques de N. I. Joukovski (1904) et W. Blasius (1907) sur les phénomènes de portance et de traînée respectivement.

2. NOTIONS PREMIERES SUR LA TRAÎNÉE

2.1. Manifestation élémentaire. Tout corps solide placé dans un fluide en mouvement subit de sa part un ensemble d'efforts aéro-hydrodynamiques comprenant forces et moments. On se limite ici à la seule composante de la résultante des forces dans la direction de l'écoulement à l'infini ou *force de traînée* \vec{T} . [QUESTIONS 3-4]

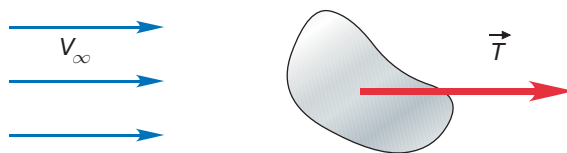


FIG. 1. Représentation schématique de la force de traînée

¹On notera l'ortographe du nom de cette famille de savants originaire de Groningue (Pays-Bas).

2.2. **Coefficient de traînée.** Pour caractériser l'intensité de cette force on introduit un *coefficient de traînée* défini par :

$$(2.1) \quad C_x = \frac{\|\vec{T}\|}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S_{ref}}$$

où ρ est la masse volumique (constante) du fluide, V_∞ le module de la vitesse de l'écoulement, supposé uniforme à l'infini et S_{ref} une surface de référence. [QUESTION 5]

3. LE BANC D'ESSAI

L'étude expérimentale en laboratoire du phénomène de traînée peut s'envisager à l'aide d'un banc d'essais comprenant :

- (a) un équipement générateur d'un écoulement uniforme (air ou eau) de vitesse connue et si possible variable,
- (b) un dispositif de positionnement de différents corps solides au sein de l'écoulement dans des conditions de perturbation minimale de celui-ci,
- (c) un système de mesure de la composante de traînée.

3.1. **La génération de l'écoulement.** Dans l'expérience proposée, le fluide est de l'eau en écoulement gravitaire de canal à surface libre. L'équipement comprend deux canaux hydrodynamiques qui seront utilisés en parallèle afin de réaliser des mesures à deux vitesses différentes.



FIG. 2. Vue d'ensemble du canal no.1 (gauche) et de la partie aval du canal no.2 (droite).

Chaque canal dispose d'une vanne de réglage du débit et un débitmètre électromagnétique est disposé sur la conduite d'alimentation de chacun des deux canaux.



FIG. 3. Canal no.1 : section de sortie (gauche) et vue intérieure (droite).

3.2. **Le dispositif de pesée hydrodynamique.** Les deux autres fonctions (b) et (c) sont intégrées dans un même composant, appelé "balance hydrodynamique de traînée" (Voir 4), dont le schéma de principe, répond au fonctionnement suivant :

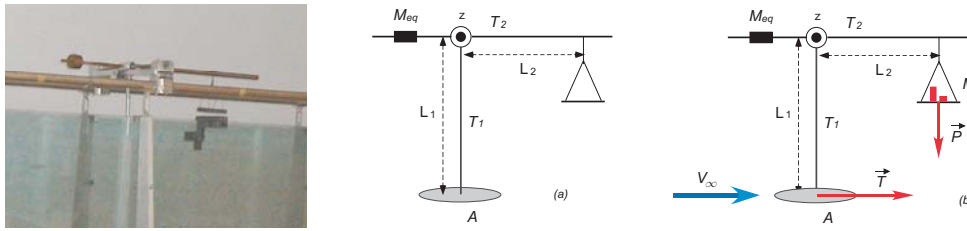


FIG. 4. Balance hydrodynamique : vue (gauche) et schéma de principe de pesée de traînée (droite).

- Le corps à étudier (A) est fixé verticalement à l'extrémité inférieure d'une tige rigide à une distance L_1 fixe — Fig.4(a). L'extrémité supérieure de (T_1) est solidaire d'une seconde tige horizontale (T_2). L'ensemble constitue un équipage mobile dont le seul degré de liberté est la rotation autour d'un axe horizontal z .
- A l'un des côtés de la tige horizontale (T_2) est suspendu, à une distance ajustable L_2 , un plateau pouvant être chargé de différentes masses. L'autre côté est chargé, à distance réglable, d'une masse d'équilibrage (M_{eq}) constante assurant l'horizontalité de la tige (T_2) en l'absence d'écoulement au droit du corps (A).
- En présence d'un écoulement — Fig 4(b) — la force de traînée génère un moment provoquant la rotation de l'équipage mobile, dont la position d'équilibre horizontal ne peut être recouvrée qu'en disposant sur le plateau de la tige (T_2) des masses dont le poids génère un couple antagoniste adapté. [QUESTIONS 6-7]

4. ANALYSE QUALITATIVE

4.1. **Etude préliminaire.** La première étape de l'analyse d'un phénomène en mécanique expérimentale des fluides consiste à dégager les grandeurs **dimensionnées** significatives du phénomène, *i.e.*, celles qui, prises **indépendamment les unes des autres** peuvent modifier, en variant, la valeur du résultat observé.

La liste suivante regroupe quelques grandeurs envisageables pour l'expérience présente :

- longueur du canal,
- largeur du canal,
- hauteur d'eau,
- débit du canal,
- vitesse de l'écoulement,
- dimension(s) de l'obstacle,
- forme de l'obstacle,
- masse volumique du fluide,
- viscosité dynamique du fluide,
- viscosité cinématique du fluide,
- nombre de Reynolds.

Pour identifier les grandeurs significatives, vous disposez de différents obstacles bidimensionnels symétriques, de même maître couple $e = 5\text{cm}$ (voir Fig.5)

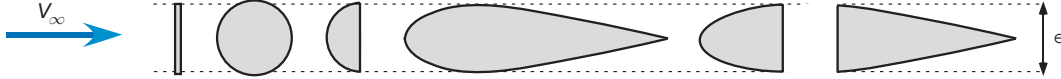


FIG. 5. Formes d'obstacles : plaque plane, cylindre circulaire, demi-cylindre circulaire, corps profilé, demi-profil amont, demi-profil aval.

En expérimentant avec ces différentes formes sur les deux canaux disponibles vous réaliserez les prescriptions de la première tâche.

TACHE 1 ANALYSE DE LA TRAÎNÉE PAR PESÉE HYDRODYNAMIQUE SUR DIFFÉRENTS CORPS.

4.2. Approfondissement. On propose d'approfondir l'analyse précédente sur un obstacle particulier. On prendra, pour fixer les idées un cylindre à section circulaire, de diamètre D et "très grand allongement", placé dans un écoulement uniforme de vitesse V_∞ à l'infini dans un fluide de masse volumique ρ et viscosité dynamique μ constantes.

Par application du théorème de Vashy-Buckingham — voir complément—, on peut montrer que, dans cette situation, le phénomène de traînée peut être globalement pris en compte à travers une relation explicite liant le coefficient de traînée et le nombre de Reynolds, soit :

$$(4.1) \quad C_x = f(R_e)$$

TACHE 2 FORMULATION GÉNÉRIQUE DE LA LOI DE TRAÎNÉE

5. ETUDE QUANTITATIVE

Cette seconde partie vise à préciser quantitativement la "loi" de dépendance en nombre de Reynolds du coefficient de traînée qui vient d'être mise en évidence.

Préalablement, les résultats de pesée directe seront comparés à ceux issus de deux autres déterminations.

5.1. Détermination globale de la traînée. Par application du théorème d'Euler à un domaine fluide judicieusement choisi et sous des hypothèses convenables, il est possible d'exprimer la valeur de la résultante des forces de traînée sur un objet quelconque. Le complément no.2 détaille le calcul pour un corps d'allongement infini placé dans un écoulement bidimensionnel plan permanent de vitesse uniforme à l'infini.

On propose d'exploiter ce résultat en l'adaptant à l'obstacle constitué d'une plaque plane, de hauteur D disposé normalement à l'écoulement dans une section droite du canal no. 2. en s'appuyant sur les éléments du complément no.2, le coefficient de traînée peut s'obtenir par

$$(5.1) \quad C_x = 2 \frac{\theta}{D}$$

où l'épaisseur de quantité de mouvement θ est définie par :

$$(5.2) \quad \theta = \int_0^h \frac{U(y)}{V_\infty} \left(1 - \frac{U(y)}{V_\infty}\right) dy$$

[QUESTION 9]

Pour déterminer cette épaisseur, un relevé ("profil") de vitesse $U(y)$ de la veine fluide est à effectuer. Vous disposez pour cela d'un micro-moulinet avec sa courbe d'étalonnage.

**LE MICRO-MOULINET EST UN EQUIPEMENT TRES FRAGILE.
TOUT CHOC AVEC LES PAROIS DU CANAL EST
A EVITER ABSOLUMENT.**

TACHE 3 TRAÎNÉE D'UNE PLAQUE PLANE PAR MESURE DE L'ÉPAISSEUR DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT.

5.2. **Détermination par mesures locales de pression.** Sur l'un des faces de la plaque qui vient d'être utilisée sont implantées, sur l'axe médian, cinq prises de pression aux cotes rapportées à la figure 6.

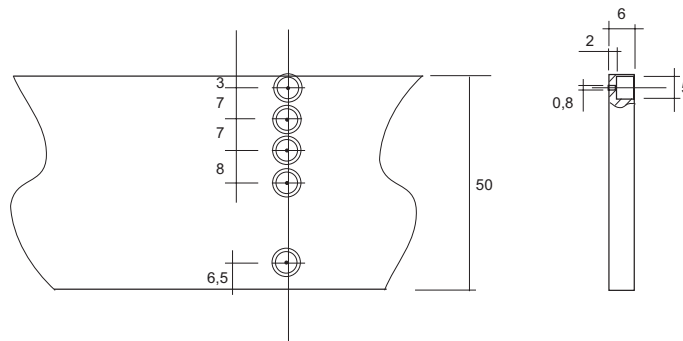


FIG. 6. Disposition des prises de pression sur la plaque (cotes en *mm*)

Par simple retournement des faces amont/aval de la plaque, il est possible de mesurer la répartition des pressions en 10 points couvrant l'intégralité de cet obstacle.

Le mesure des pressions se fait par lecture de niveaux sur un multimanomètre à liquide inclinable.

TACHE 4 TRAÎNÉE D'UNE PLAQUE PLANE PAR RELEVÉ DE PRESSIONS STATIQUES PARIÉTALES.

5.3. **Dépendance au nombre de Reynolds.** Comme on l'a vu lors de l'étude qualitative, le coefficient de traînée ne dépend que du nombre de Reynolds de l'écoulement, pour un obstacle donné. La figure 7 d'après Rebuffet ^[2], présente ainsi les résultats de mesure du coefficient de traînée d'un cylindre sous forme d'un graphe $C_x = f(R_e)$. Deux

²Pierre REBUFFET, *Aérodynamique expérimentale*, Lib. Polytechnique Ch. Béranger Paris, 1962

configurations sont reportées, en fonction de l'allongement du cylindre $\lambda = H/D$, rapport entre la longueur et le diamètre du cylindre.

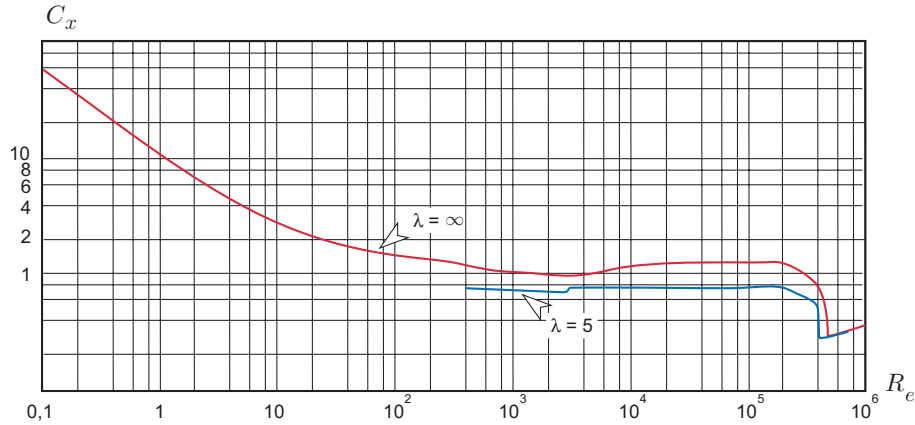


FIG. 7. Coefficient de traînée du cylindre, d'après Rebuffet [1].

Vous conclurez cette manipulation par une synthèse de vos résultats et leur confrontation aux données de la littérature. A l'issue de cette étude et à la lumière de visualisations complémentaires des écoulements que vous pourrez effectuer, vous formulerez des explications possibles aux constats que vous aurez pu dégager relativement, notamment, à la réduction de traînée par adaptation de la forme de l'obstacle.

TACHE 5 DISCUSSION GÉNÉRALE - SYNTHÈSE DES RÉSULTATS -
RÉDUCTION DE TRAÎNÉE

6. FOURNITURES

Les fournitures se composent de deux éléments :

- Le cahier de résultats regroupant les feuilles de mesures et les différentes tâches,
- La fiche de réponses aux questions,

Les feuilles de mesures devront impérativement être complétées en séance et validées par le responsable du TP.

L'ensemble des fournitures devra être remis au plus tard 8 jours après la fin du cours.

7. CAHIER DE RÉSULTATS

**EXPÉRIENCES SUR LA TRAÎNÉE
CAHIER DE RÉSULTATS**

ELEVES :

GROUPE :

.
.
.
.

Tâche 1 :

**ANALYSE DE LA TRAÎNÉE DE DIFFÉRENTS CORPS
PAR PESÉE HYDRODYNAMIQUE DIRECTE**

Tâche 2.

FORMULATION GÉNÉRIQUE DE LA LOI DE TRAÎNÉE

Tâche 3.

**TRAÎNÉE D'UNE PLAQUE PLANE PAR MESURE DE
L'ÉPAISSEUR DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT**

Tâche 4.

**TRAÎNÉE D'UNE PLAQUE PLANE PAR RELEVÉ DE PRES-
SIONS STATIQUES**

Tâche 5.

**DISCUSSION GÉNÉRALE - SYNTHÈSE DES RÉSULTATS
- RÉDUCTION DE TRAÎNÉE**

Tâche 1 : ANALYSE DE LA TRAÎNÉE DE DIFFÉRENTS CORPS PAR PESÉE HYDRODYNAMIQUE DIRECTE

1. Essais

En expérimentant avec les différents obstacles sur les deux canaux complétez la feuille de mesure no.1.

FEUILLE DE MESURES no. 1

1.1. Conditions expérimentales

Canal no. ...

Hauteur d'eau réelle (cible 27 cm) : ...

Indication débitmètre :

Montage balance : Longueur de bras vertical $L_1 = \dots$

Longueur de bras horizontal $L_2 = \dots$

Equilibrage de trainée des supports

1.2. Mesures

Corps						
Masse						
Traînée						

Validation

1.3. Estimation de l'incertitude de mesure :

2. Discussion : Recherche de grandeurs significatives

2.1. Grandeurs proposées :

Sur la base de données que vous venez d'établir, renseignez les éléments du tableau 1 qui peuvent l'être.

Pour les autres réponses, "imaginez" des situations où l'on pourrait faire varier *indépendamment* chaque grandeur dimensionnée et faites appel à du "bon sens" pour conclure.

Élément/Grandeur	A retenir	Justification du choix
Longueur du canal	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Largeur du canal	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Hauteur d'eau	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Débit du canal	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Vitesse de l'écoulement	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Dimension de l'obstacle	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Forme de l'obstacle	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Dimension de l'obstacle	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Masse volumique du fluide	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Viscosité dynamique	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Viscosité cinématique	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	
Nombre de Reynolds	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON	

TAB. 1. Grandeurs significatives du phénomène de traînée.

2.2. Autres propositions

Pensez-vous que la liste précédente puisse être considérée comme exhaustive ?

Tâche 2 : FORMULATION GÉNÉRIQUE DE LA LOI DE TRAÎNÉE D'UN CORPS

1. L'analyse qualitative préliminaire du phénomène de traînée *sur un obstacle donné*, de dimension caractéristique $D(m)$ a permis de dégager **cinq** grandeurs dimensionnées significatives. Précisez ce que sont ces cinq grandeurs G_i , $i = 1$ à 5.

Grandeur	Description	Symbole
G_1		
G_2		
G_3		
G_4		
G_5		

TAB. 2. Grandeurs dimensionnées significatives de la traînée sur un obstacle donné.

2. En déduire que la valeur *dimensionnelle* F de la traînée vérifie une relation de la forme $f(F, G_2, G_3, G_4, G_5) = 0$, soit avec les symboles du tableau 2 :

$$f(F, \quad , \quad , \quad , \quad) = 0$$

3. Etablir la valeur des coefficients a_{ij} de la matrice dimensionnelle correspondante :

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
F
[L]	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
[M]	1	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
[T]	-2	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}

soit $(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -2 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$

Réponse :

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ -2 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

4. En application du théorème de Vaschy-Buckingham — voir compléments—, de combien de produits adimensionnels indépendants p dispose-t-on pour écrire, *sous forme adimensionnelle* la relation gouvernant l'expression de la traînée ?

Réponse :

$$p =$$

5. En déduire que la relation dimensionnelle régissant la traînée sur le cylindre peut se réduire *adimensionnellement* à une équation de la forme $f(\pi_1, \pi_2) = 0$ et donner les expressions des produits adimensionnels π_1 et π_2 en fonction des grandeurs dimensionnelles de base.

Clé : On posera

$$\pi_1 = F^{b_{11}} \times V^{b_{12}} \times D^{b_{13}} \times \rho^{b_{14}} \times \mu^{b_{15}}$$

$$\pi_2 = F^{b_{21}} \times V^{b_{22}} \times D^{b_{23}} \times \rho^{b_{24}} \times \mu^{b_{25}}$$

et l'on procèdera à une détermination des valeurs des coefficients b_{ij} en suivant la méthode décrite en complément.

Solution de la question no. 5 :

6. Interpréter le résultat qui vient d'être établi à l'aide des paramètres adimensionnels usuels en mécanique des fluides, afin de retrouver la formulation de l'éq.(4.1).

Tache 3 : TRAÎNÉE D'UNE PLAQUE PLANE PAR MESURE DE L'ÉPAISSEUR DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

1. Essais

En utilisant le micro-moulinet procédez au relevé du profil de vitesses dans le canal et complétez la feuille de mesure no.2.

FEUILLE DE MESURES no. 2

1.1. Conditions expérimentales

Canal no. ...

Hauteur d'eau réelle (cible 27 cm) : ...

Indication débitmètre :

Mesure locale de vitesse par :

Section du relevé de profil de vitesse ...

2.2. Mesures

Côte										
Lecture										
Vitesse U										
$\frac{U}{V_\infty}(1 - \frac{U}{V_\infty})$										

Validation

2. Détermination de l'épaisseur de quantité de mouvement :

On calculera l'épaisseur de quantité de mouvement, telle que définie par l'éq.(5.2), en utilisant une procédure d'intégration quelconque (Excel, Matlab, Maple...). On précisera à cette occasion ce que représente la distance d'intégration h .

Procédure d'intégration utilisée :

Résultat :

3. Discussion

3.1. Comparaison avec la valeur obtenue par pesée directe

3.2. Commentaires

Tâche 4 : TRAÎNÉE D'UNE PLAQUE PLANE PAR RELEVÉ DE PRESSIONS STATIQUES

1. Essais

En raccordant le multi-manomètre aux prises de pression implantée sur la plaque plane, procédez aux essais permettant de compléter la feuille de mesure no. 3.

FEUILLE DE MESURES no. 3

1.1. Conditions expérimentales

Canal no. ...

Hauteur d'eau réelle (cible 27 cm) : ...

Indication débitmètre :

1.2. Mesures

No. de prise	Face amont					Face aval				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Lecture										
Pression P										

Validation

2. Résultats

2.1. Estimation de l'incertitude de mesure de pression :

2.2. Calcul de la résultante des forces de pression et estimation de son incertitude.

3. Discussion

3.1. Comparaison avec les valeur obtenues par d'autres procédures.

3.2. Commentaires :

Tâche 5 : DISCUSSION GÉNÉRALE - SYNTHÈSE DES RÉSULTATS - RÉDUCTION DE TRAÎNÉE

1. Synthèse des résultats

Complétez la figure ci-dessous en y reportant les résultats de vos mesures pour les différents obstacles.

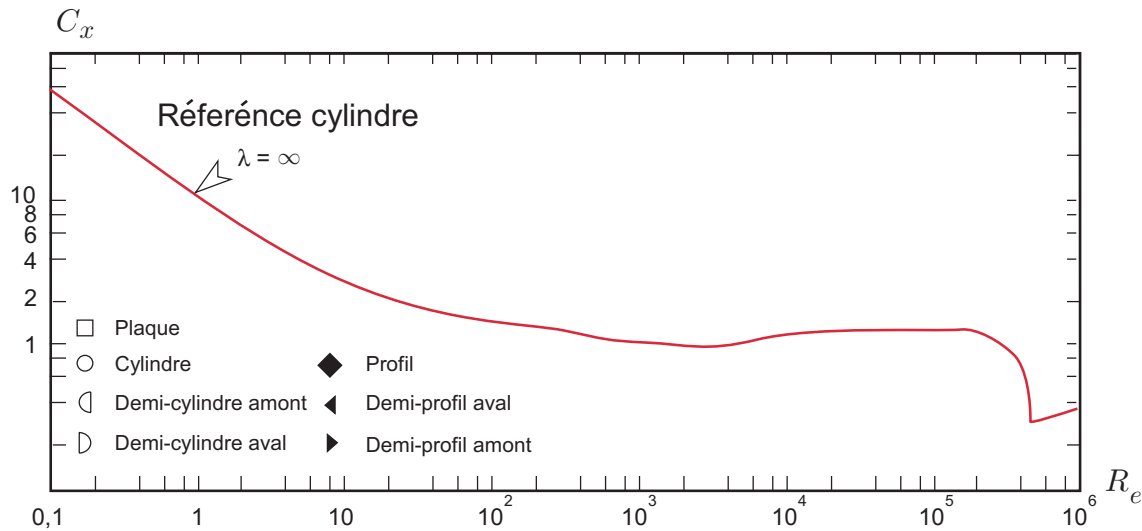


FIG. 8. Coefficient de traînée pour différents obstacles.

2. Visualisations Par injection d'un filet de colorant en différents points de l'écoulement, vous pouvez visualiser certaines propriétés du champ des écoulements autour de divers obstacles.

2.1. Quel type de lignes met-on en évidence à l'aide de cette méthode de visualisation par traceur ?

- Ligne de courant
- Trajectoire
- Ligne d'émission
- Ligne fluide

2.2. En vous appuyant sur ces visualisations, dessinez l'allure des champs d'écoulements autour des obstacles ci-dessous.



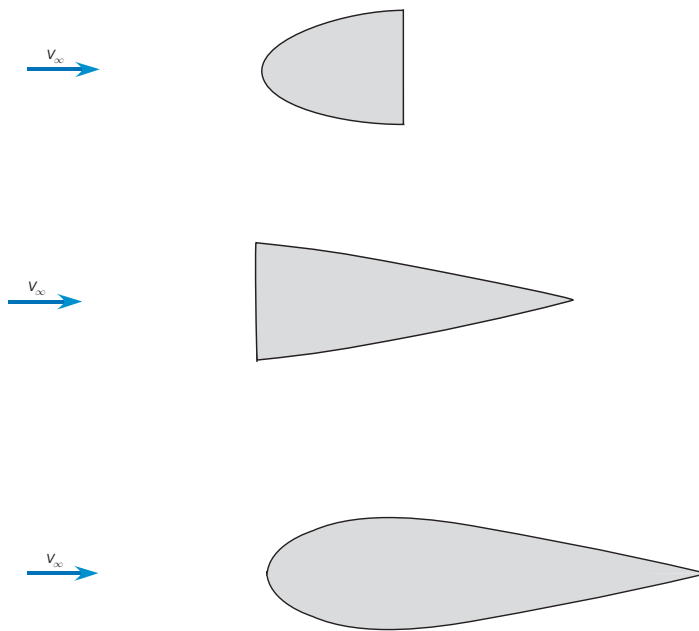


FIG. 9. Allure des champs des lignes de courant d'écoulements autour de divers obstacles.

3. Conclusions *Quelles conclusions dégagez-vous de l'ensemble des observations et résultats précédents quant-à l'influence de la forme de l'obstacle sur sa traînée ?*

8. QUESTIONS

QUESTION 1 : *Rappelez brièvement en quoi consiste le "paradoxe" de d'Alembert ?*

QUESTION 2 : *Pouvez-vous indiquer où ce paradoxe trouve son origine ?*

QUESTION 3 : *Connaissez-vous une autre force susceptible de se manifester sur un corps placé dans un écoulement ?*

QUESTION 4 : *Quels types de contrainte locale peuvent être à l'origine de la résistance de traînée ?*

QUESTION 5 : *Donner la dimension du coefficient C_x ?*

QUESTION 6 : *Comment déduit-on le module de la traînée de la valeur de la masse M disposée sur le plateau de la balance à l'équilibre ?*

QUESTION 7 : *A quoi peut servir l'ajustement de la longueur variable L_2 ?*

QUESTION 8 : *Quels commentaires vous inspire l'allure des graphes du coefficient de traînée de cylindres en fonction du nombre de Reynolds de la figure 7 ?*

EXPÉRIENCES SUR LA TRAÎNÉE

COMPLÉMENTS

1. Théorème de VASCHY-BUCKINGHAM
2. Calcul de la traînée par méthode intégrale

9. COMPLÉMENT 1

Théorème de VASCHY-BUCKINGHAM

9.1. **Enoncé du théorème de VASCHY-BUCKINGHAM.** Ce théorème, de portée très générale, a été énoncé et démontré par Vaschy et Buckingham en 1914. Il est également connu sous le nom de "théorème des π ".

Il s'articule autour des propositions suivantes :

Hypothèses : Soit un phénomène physique gouverné par une relation **dimensionnelle**

$$f(G_1, G_2, \dots, G_n) = 0$$

entre n grandeurs **dimensionnelles** G_1, G_2, \dots, G_n .

Conclusion 1 : La relation dimensionnelle entre les n grandeurs physiques dimensionnées peut être réduite à une relation **adimensionnelle**

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0$$

entre p produits **sans dimension** $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ formés à partir des n variables dimensionnées G_1, G_2, \dots, G_n .

Conclusion 2 : Le nombre p de produits sans dimension est égal au nombre total n des grandeurs dimensionnées diminué du rang r de leur matrice dimensionnelle

$$p = n - r$$

9.2. **Mise en pratique.**

- La dimension $[G]$ de toute grandeur physique G peut être exprimée par une *fonction de dimension* de type monôme, en puissance des unités fondamentales associées au phénomène. En (thermo)mécanique des fluides, il s'agit usuellement de la longueur $[L]$, de la masse $[M]$, du temps $[T]$ et de la température $[\Theta]$.

On peut donc poser pour toute grandeur $G_i, i = 1 \dots n$:

$$[G_i] = [L]^{a_{1i}} \times [M]^{a_{2i}} \times [T]^{a_{3i}} \times [\Theta]^{a_{4i}}$$

- Matrice dimensionnelle : L'ensemble matriciel (**A**) des valeurs des coefficients (a_{ij}) pour lesquels :

✓ $i = 1, \dots, r$, où r désigne le nombre d'unités fondamentales mises en jeu,

✓ $j = 1, \dots, n$, où n représente le nombre de grandeurs dimensionnées du problème,

compose la *matrice dimensionnelle* du problème.

En explicitant sous forme de tableau, cela se représente comme suit :

	[G1]	[G2]	...	[Gi]	...	[Gn]
[L]	a_{11}	a_{12}	...	a_{1i}	...	a_{1n}
[M]	a_{21}	a_{22}	...	a_{2i}	...	a_{2n}
[T]	a_{31}	a_{32}	...	a_{3i}	...	a_{3n}
[Θ]	a_{41}	a_{42}	...	a_{4i}	...	a_{4n}

où l'on vérifie bien que le nombre de lignes, qui fixe la valeur du *rang* de cette *matrice dimensionnelle*, est égal au nombre d'unités fondamentales impliquées dans l'expression des grandeurs dimensionnées du problème.

• Produits adimensionnels : Les expressions des paramètres adimensionnels π_α , $\alpha = 1$ à p sont déterminées à partir d'un sous-ensemble G_1, G_2, \dots, G_r des n grandeurs initiales, par des relations de la forme :

$$\pi_1 = \frac{G_{r+1}}{G_1^{b_{11}} \times G_2^{b_{12}} \dots \times G_r^{b_{1r}}} \dots \pi_\alpha = \frac{G_{r+\alpha+1}}{G_1^{b_{\alpha 1}} \times G_2^{b_{\alpha 2}} \dots \times G_r^{b_{\alpha r}}} \dots \pi_p = \frac{G_n}{G_1^{b_{p1}} \times G_2^{b_{p2}} \dots \times G_r^{b_{pr}}}$$

• Une méthode pratique de détermination des coefficients b_{kl} , $k = 1$ à p et $l = 1$ à n consiste à résoudre p systèmes linéaires de forme matricielle :

$$(\mathbf{A})(\mathbf{B}_k) = 0, \quad k = 1 \text{ à } p$$

où (\mathbf{A}) est la matrice dimensionnelle du problème ($r \times n$) et (\mathbf{B}_k) les p vecteurs colonne ($n \times 1$) dont les composantes sont définies par

$$(\mathbf{B}_1) = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1r} \\ 1(l \equiv r+1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}_2) = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2r} \\ 0 \\ 1(l \equiv r+2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots (\mathbf{B}_k) = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ \vdots \\ b_{kr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1(l \equiv k) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

10. COMPLÉMENT 2

Calcul de la traînée méthode intégrale

10.1. Objectif du calcul de la traînée par méthode intégrale. L'application des bilans globaux de masse et de quantité de mouvement à un domaine judicieusement choisi permet d'exprimer, sous certaines hypothèses, la valeur de la *résultante* de la force de traînée appliquée à un obstacle.

On détaille ici le calcul.

10.2. Hypothèses générales. On se limite à un écoulement *bidimensionnel plan, permanent*, de fluide *visqueux*, en évolution *isovolume* et à *masse volumique constante*.

10.3. Définition du domaine et hypothèses aux frontières. Le domaine est défini au sens *eulérien*. Il s'agit donc d'un *volume de contrôle* (Δ). Il est limité (voir figure) par deux surfaces :

- la surface *fluide* C coïncidant avec la paroi mouillée de l'obstacle,
- une surface quelconque S entourant l'obstacle.

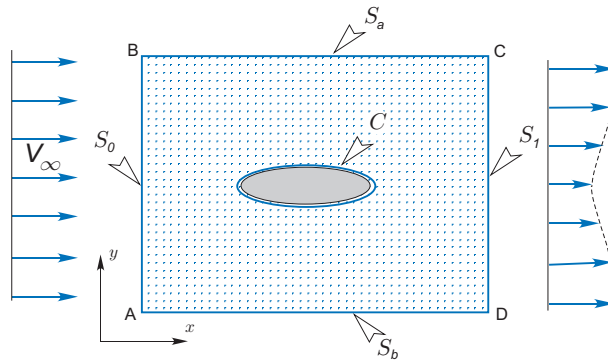


FIG. 10. Représentation schématique de la force de traînée

L'obstacle est supposé immergé dans un écoulement de vitesse uniforme à l'infini, avec pour vitesse $\vec{V}_\infty = V_\infty \vec{x}$.

De ce fait, la surface externe sera telle que $S = S_0 \cup S_1 \cup S_a \cup S_b$ où les surfaces d'entrée et de sortie S_0 et S_1 sont prises normales à la direction de l'écoulement et de même aire, les plans latéraux S_a et S_b venant fermer le contour extérieur, parallèlement à la direction de l'écoulement à l'infini amont.

La présence de l'obstacle au sein du domaine limité par la surface S perturbe l'écoulement uniforme, avec deux conséquences :

- le profil de vitesse dans la section de sortie S_1 n'est plus uniforme, voir Fig.10,
- les surfaces latérales S_a et S_b ne sont pas des surfaces de courant. En effet, le bilan global de masse sur le domaine (Δ) se traduit par :

$$(10.1) \quad \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_C \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

ce qui, par unité d'envergure, conduit à :

$$\int_{S_a \cup S_b} v dx = V_\infty h - \int_h U dy \equiv \int_h (V_\infty - U) dy$$

en désignant par h la distance commune $AB \equiv CD$.

Les surfaces latérales S_a et S_b seront, par hypothèse, supposées localisées "à grande distance de l'obstacle". Pour préciser cette propriété, nous posons en tout point sur l'une ou l'autre de ces surfaces :

$$(10.2) \quad \vec{V}|_{S_a} \text{ ou } \vec{V}|_{S_b} = V_\infty \vec{x} + \vec{v}$$

où \vec{v} désigne une "petite perturbation" de vitesse au sens où :

$$(10.3) \quad \frac{\|\vec{v}\|}{V_\infty} \ll 1$$

et avec $\vec{v}|_{S_0} = 0$ (écoulement uniforme non perturbé en entrée du domaine).

Corrélativement, nous poserons pour la pression en tout point de S :

$$(10.4) \quad P = P_\infty + p$$

avec $p|_{S_0} = 0$ et sur les trois autres éléments S_1 , S_a ou S_b ³ :

$$(10.5) \quad \frac{|p|}{P_\infty} \sim \frac{\rho \|\vec{v}\|^2}{P_\infty} \ll 1$$

10.4. Bilan global de quantité de mouvement : Théorème d'Euler. L'expression du théorème d'Euler au domaine de contrôle (Δ) se traduit, pour le bilan de quantité de mouvement, par la relation vectorielle :

$$(10.6) \quad \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_\Delta \rho \vec{g} dv - \iint_{S \cup C} P \vec{n} d\sigma + \iint_{S \cup C} \vec{T}_\nu d\sigma$$

où $-P\vec{n}$ et \vec{T}_ν désignent les contraintes locales de pression et de viscosité respectivement.

Nous allons détailler à présent les expressions de chacune de ces intégrales.

Flux de quantité de mouvement : en introduisant la décomposition (10.2) on peut écrire :

$$\vec{I}_1 \equiv \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_S \rho \vec{V}_\infty (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma + \iint_S \rho \vec{v} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

La première intégrale est nulle, d'après l'équation de continuité globale (10.1). Quant-à la seconde, sa contribution est nulle sur S_0 , de sorte que :

$$\vec{I}_1 = \iint_{S_1} \rho \vec{v} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma + \iint_{S_a \cup S_b} \rho \vec{v} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma \equiv \iint_{S_1} \rho \vec{v} U d\sigma + \iint_{S_a \cup S_b} \rho \vec{v} v d\sigma$$

Par projection sur l'axe \vec{x} (direction de la résultante de traînée) et en ne conservant que les termes de premier ordre en (petite) perturbation de vitesse, on aboutit à :

$$I_1 = \vec{I}_1 \cdot \vec{x} \simeq \iint_{S_1} \rho \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{x}}_u U d\sigma$$

Finalement et par unité d'envergure :

$$(10.7) \quad I_1 \simeq \int_h \rho (U - V_\infty) U dy$$

Forces de volume : la traînée étant dirigée suivant l'axe horizontal, la contribution de ce terme en projection suivant \vec{x} sera nulle, s'agissant de l'action des forces de gravité.

Forces de pression : en distinguant les deux surfaces S et C et en introduisant la décomposition eq.(10.4) il vient :

$$\vec{I}_2 \equiv - \iint_{S \cup C} P \vec{n} d\sigma = - \iint_S (P_\infty + p) \vec{n} d\sigma - \iint_C P \vec{n} d\sigma$$

³Ce résultat — eq.(10.5) — sera admis ici

$$= - \iint_S P_\infty \vec{n} d\sigma - \iint_S p \vec{n} d\sigma - \iint_C P \vec{n} d\sigma$$

La première intégrale est identiquement nulle (intégration d'une constante sur une surface fermée). Sous l'approximation de petite perturbation, $p \sim \mathcal{O}(v^2)$, la seconde intégrale peut être négligée devant les contributions du premier ordre en perturbation de vitesse. Finalement, en projetant sur l'axe \vec{x} , il reste :

$$(10.8) \quad I_2 = \vec{I}_2 \cdot \vec{x} \simeq - \iint_C P \vec{n} \cdot \vec{x} d\sigma$$

Forces de viscosité : en distinguant là encore les deux surfaces S et C il vient :

$$\vec{I}_3 \equiv \iint_{S \cup C} \vec{T}_\nu d\sigma = \iint_S \vec{T}_\nu d\sigma + \iint_C \vec{T}_\nu d\sigma$$

La viscosité du fluide étant faible, les forces de viscosité n'ont de contribution significative que dans les régions où les gradients de vitesse sont localement très élevés. A condition de disposer correctement les surfaces de la frontière externe S par rapport à l'obstacle, les gradients en questions peuvent être effectivement réduits, de sorte que, en projection suivant \vec{x} :

$$(10.9) \quad I_3 = \vec{I}_3 \cdot \vec{x} \simeq \iint_C \vec{T}_\nu d\sigma$$

En définitive, regroupant les relations (10.7), (10.8) et (10.9) on peut écrire :

$$\int_h \rho(U - V_\infty)U dy = - \underbrace{\iint_C P \vec{n} \cdot \vec{x} d\sigma}_{-T} + \iint_C \vec{T}_\nu d\sigma$$

où le second membre représente la résultante suivant \vec{x} des forces exercées *par l'obstacle sur le fluide*.

Au final, on a donc :

$$(10.10) \quad T = \int_h \rho U (V_\infty - U) dy$$