

TP Système, Partie I (2h maxi) :

Système Linéaire d'ordre 2

O. Pannekoucke
olivier.pannekoucke@meteo.fr

12 février 2007

RESUMÉ

L'objectif de cette partie est de vous mettre en situation face à un système réel. Votre sens physique est mis à contribution pour analyser et mettre en place une démarche scientifique pour expliquer vos observations et illustrer vos intuitions.

Des outils pour l'analyse de système réel sont introduit sous forme rudimentaire (plan de phase, notion d'énergie). Ils seront exploités, mis à profit et complétés dans la seconde partie du TP (système non linéaire).

Pensez à réserver du temps à la rédaction du compte-rendu, ne négligez pas cette phase importante.

MOT CLÉS: Oscillateur mécanique linéaire, Fonction de transfert, Réponse d'un système réel, Simulateur analogique linéaire, Espace des phases.

1 Oscillateur mécanique (45 min maxi)

OBJECTIFS :

Étude phénoménologique du système. Détermination de la relation entre pulsation propre, raideur et masse. Mise en équation du système. Étude du comportement en présence de frottement. Simplification des équations suivant l'amplitude du frottement. Analyse harmonique du système : détermination partielle de la fonction de transfert du système (réponse en amplitude et phase).

1.1 Introduction

Cette première partie propose une étude rapide d'un oscillateur mécanique linéaire. La forme très simple sous laquelle l'oscillateur mécanique se présente permet d'observer facilement les phénomènes d'oscillations (ou vibrations) libres et forcées, et évite l'effet "boîte noire". Cet appareil couvre une gamme d'expériences et de démonstrations incluant les vibrations libres et forcées d'un système ressort/masse/amortisseur. Il possède des réglages simples et on peut aisément observer et enregistrer les déplacements de la masse à l'aide d'un enregistreur graphique.

Un chariot, porteurs de masses, se déplace le long de deux guides verticaux, guidé par des galets offrant un seul degré de liberté avec un amortissement du au frottement minimum. Il est possible de modifier la masse du chariot, la raideur du ressort et l'amortissement fluide. Dans le cadre du TP les enregistreurs graphiques seront utilisés. L'enregistreur de gauche permet de mesurer l'amplitude et la fréquence des oscillations. Celui de droite, la phase du système par rapport au forçage.

Attention durant la manipulation du système : la protection plexiglas doit toujours être maintenue durant une expérience ! Vous n'avez pas à mettre l'installation sous tension (sauf vers la fin du TP) ! Appelez l'intervenant si vous avez des questions ou des difficultés (durant la manip ou autre) !

1.2 Système masse-ressort : Analyse dimensionnelle et loi de similitude

Dans cette partie, pas d'équation ! Uniquement une interprétation physique et une étude qualitative du système. Enlevez la force de frottement fluide et observez le comportement du système. En manipulant le système : ajout-suppression de masses et influence de la raideur du ressort. Déduisez que l'on peut mettre en relation ω , k et m . Formellement cela se traduit par $\omega = f(k, m)$ avec **f une fonction que l'on ne cherchera pas à expliciter pour le moment, en particulier n'excrivez aucune relation issue de quelque réminiscence que ce soit !**

La nature de la relation mise en évidence ci-dessus est intrinsèque au système. C'est une loi de la physique, elle décrit une relation universelle invariante dans toute représentation. (Représentation est à prendre au sens de système de coordonnées, comme pour la représentation matricielle d'application linéaire entre espace vectorielle : la représentation matricielle dépend de la base ; l'application linéaire est indépendante de la base.) En clair, cela signifie qu'une telle relation est vrai, même s'il vient l'envie de changer les échelles des "règles de mesure". Dilatons les règles, le temps est dilaté suivant $t \rightarrow \tau t$ et la masse l'est suivant $m \rightarrow \mu m$. D'après une analyse dimensionnelle de la raideur k dans le

système dimensionnel (M, L, T) (pour masse, longueur et temps), donnez la nouvelle forme dilatée de cette grandeur, *i.e.* $k \rightarrow \alpha k$ avec α exprimé en fonction de τ et μ . Procédez de même avec $\omega \rightarrow \gamma \omega$. Vous obtenez ainsi une nouvelle relation $\gamma \omega = f(\alpha k, \mu m)$.

Ici, deux degrés de libertés dans le système physique : la raideur, la masse. Elles résultent du mélange de trois grandeurs dépendantes : le temps, la raideur et la masse. Ainsi, choisir une règle de mesure pour la raideur et la masse, c'est imposer une contrainte sur la règle de mesure du temps. En cherchant à rendre la raideur et la masse unitaire dans une règle adaptée (*i.e.* $\alpha k = 1$ et $\mu m = 1$), donnez la formulation physique explicite de la pulsation, contrainte par l'analyse dimensionnelle. La justification de cette démarche est apportée par le théorème π ou théorème de Vaschy-Buckingham.

Que pensez-vous de l'approche qui vient de vous être suggérée? Connaissez-vous des transformations similaires utilisée pour la résolution de certaine équation en physique (équation de diffusion par exemple)? Connaissez-vous des applications directes en mécanique des fluides?

1.3 Système masse-ressort : Modélisation mathématique du système

Toujours dans l'hypothèse non visqueuse, écrire le bilan des forces du système "masse" et en déduire l'équation pilotant sa dynamique. En déduire la pulsation des oscillations. Comparez avec ce résultat à celui de la section précédente. Que vous a permis de déterminer cette mise en équation par rapport à la partie précédente?

1.4 Système masse-ressort-amortissement

Maintenant, une force de frottement visqueuse est prise en compte. Après un bilan des forces, donnez l'équation de la dynamique du système. Décrivez qualitativement l'évolution du système suivant l'importance de l'amortissement (oscillation/pas d'oscillation). Durant cette discussion, décrivez les équations physiquement admissible pour les extrêmes. **Naturellement, il n'est pas question de résoudre l'équation générale et de la simplifiée la solution suivant la configuration. C'est la procédure inverse qui est demandée ici!** Argumentez votre propos à l'aide de considération d'échelles de temps caractéristique du système. Illustrez vos conclusions à l'aide d'expériences.

1.5 Système masse-ressort-amortissement + forçage

Maintenant, le système est étudié en présence d'un forçage. **L'objectif est d'observer la réponse du système forcé.** En particulier sa phase par rapport au forçage. Vous disposez d'un tambour d'enregistrement, à la droite du système. Sans procéder à aucun enregistrement, mettez-le en fonctionnement, et observez à quoi correspond cet appareil de mesure. Pour effectuer la mesure, vous avez besoin de l'aide de l'intervenant pour cette étape!

Avec l'aide de l'intervenant, vous avez réalisé certaines mesures. En particulier, **decrivez pourquoi la courbe obtenue sur le tambour est fermée et ne présente qu'une oscillation.**

Rappelez la manière de résoudre mathématiquement un tel système forcé. En négligeant la solution transitoire, exprimez le comportement à temps long. Cette solution confirme-t-elle vos observations de l'enregistrement de phase?

1.6 Annexe

1.6.1 Données techniques

Masse totale : 1kg Raideur : $k = 4.7 \text{ kN/m}$ Vitesse de l'enregistreur gauche : $V = 0.02 \text{ m/s}$

1.6.2 Influence de la masse

Le support du ressort doit être bloqué à la partie haute du bâti, le dashpot doit être désolidarisé en enlevant la vis située sur la partie haute. Ajuster la hauteur de l'équipage mobile pour que le support d'enregistrement soit centré par rapport au papier d'enregistrement. Mettre en place le stylo d'enregistrement et régler sa pression par rapport au papier d'enregistrement. Tirer l'équipage mobile jusqu'à sa butée, mettre en route l'enregistreur et le relâcher. Laisser le système osciller jusqu'à ce qu'une longueur suffisante d'enregistrement soit effectuée; arrêter alors l'enregistrement. Réajuster la position verticale de l'ensemble par rapport à l'enregistreur et répéter l'expérience.

1.6.3 Influence de l'amortissement

Pour étudier l'influence de l'amortissement, relier le dashpot à l'équipage mobile au moyen de l'écrou moleté. Vérifier que le piston du dashpot est bien centré. Vérifier le niveau d'huile qui doit se trouver juste au-dessous du couvercle anti-éclaboussure. Fermer le dashpot complètement à l'aide de l'écrou moleté. Tirer l'équipage mobile vers la butée de fin de course, mettre en route l'enregistreur et relâcher la butée. Arrêter l'enregistreur lorsque l'équipage mobile revient à sa position centrale. Pour changer l'amortissement, ouvrir le dashpot et modifier la position du piston d'1/4 de tour et répéter l'expérience jusqu'à ce que 3 à 4 tours soient effectués.

2 Dispositif analogique (45 min maxi)

OBJECTIFS :

Mise en place d'un montage analogique pour la résolution d'une équation différentielle linéaire (jeux de LEGO ©). Étude théorique et introduction de la représentation dans le plan de phase : espace des degrés de liberté du système caractérisant sont état au cours du temps. Analyse énergétique du système. Analyse de la trajectoire dans le plan de phase : sans frottement, puis avec frottement (changement topologique dans le plan de phase). Introduction du champ de vecteur dans l'espace des phases. Mise en évidence d'un comportement relativement simple. Introduction de la notion de bassin d'attraction.

2.1 Introduction

Le but de cette deuxième partie est d'étudier le comportement d'un système linéaire du 2ème ordre simulé au moyen d'un calculateur électronique. Il s'agit de montrer le lien direct entre la résolution d'un SLI et les problèmes rencontrés en mécanique, comme pour l'expérience modèle de l'amortisseur hydraulique présentée et étudiée dans la 1ère partie du TP. Ce montage permettra de plus de visualiser le signal et sa dérivée temporelle dans la représentation série temporelle et plan de phase.

2.2 Présentation théorique

Cette partie, s'intéresse à la résolution analogique d'un SLI (décrit par une équation comparable à celle trouvée précédemment) et en étudier le montage suivant (cf. tableau pour les valeurs numériques des composants) :

n AOP	Z boucle	Z entrée
A1	0.47 μ F	2.7 M Ω (gain G1=0.78)
A2	0.47 μ F	2.7 M Ω (gain G2=0.78)
A3	1 M Ω	0.56 M Ω (gain G3=1.78) (gain K0=1)
A4	22 k Ω	22 k Ω (gain G4=1)

L'équation différentielle simulée par le montage ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$s(t) + 2\frac{\zeta}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

avec ζ coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre "non amortie". Application numérique : $\omega_0 = 1,05 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\zeta = 0,375a$.

- 1) Décrire succinctement comment il est possible de simuler l'équation 1 à partir du circuit électronique de la figure 1.

Le comportement d'un système est décrit qualitativement et d'une façon très parlante, par l'utilisation d'une représentation due à POINCARÉ, appelée PLAN de PHASE. Celle-ci est définie en portant $s(t)$ en fonction de sa dérivée ds/dt . Les lieux obtenus sont alors appelés trajectoires de phases. A titre d'exemple, considérons le S.L.I. du 2ème ordre. En posant $q = s(t)$ et $p = \frac{ds(t)}{dt}$

- 2) Montrer que l'équation différentielle du système peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 s^2 \right] = -4\zeta \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

- 3) Commentez le résultat obtenu en terme d'énergie. Discuter de l'importance capitale de la propriété physique d'amortissement (point de vue dynamique et énergétique) en considérant par exemple l'expérience de l'amortisseur hydraulique ou du pendule. Transposer au cas de la mécanique des fluides. Dans le cadre du TP, la solution générale pour $\zeta = 0$, peut être écrite sous la forme : $s(t) = b \sin(\omega_0 t + \phi)$
- 4) En déduire la forme des trajectoires de phase dans ce cas simple en sachant que du point de vue pratique, le calculateur (Fig. 2) délivre des tensions qui sont en réalité : $X(t) = -\frac{1}{G_2} \frac{ds}{dt}$ et $Y(t) = s(t)G_3$.
- 5) Quelle est alors la forme des trajectoires de phase de $Y(X)$?
- 6) En déduire les relations qui lient "b" et " ϕ " aux C.I. $X(0)$ et $Y(0)$.
- 7) Déterminer alors la valeur de l'invariant "I" (tel que $\frac{dI}{dt} = 0$ lorsque $\zeta = 0$). Quel sens donnez-vous à " ϕ " ? On commentera toutes ces propriétés en terme d'énergie (en discutant par exemple de l'expérience de l'amortisseur hydraulique ou du pendule).

OPERATEUR	LOI DE FONCTIONNEMENT	SCHEMA EQUIVALENT	SYMBOLE
POTENTIOMETRE	$a = \frac{\ell}{1 + b\ell(1-\ell)}$ avec : $a = \frac{s(b)}{a(s)}$: "affichage" $\ell = \frac{r}{R}$: "lecteur" (cursor) $b = \frac{R}{Z}$		 $0 \leq a \leq 1$
SCHMATEUR	$s = - \sum \frac{G_i}{\ell} e_i$ avec $G_i = R_o / R_i$		
INTEGRATEUR avec Condition initiale	$s = s_0 - \int G_i e_i dt$ avec $G_i = (R_i C)^{-1}$		
INTEGRATEUR- SOMMATEUR	$s = s_0 - \int G_i e_i dt$ avec $G_i = (R_i C)^{-1}$		

FIG. 1 - Composants électroniques de base.

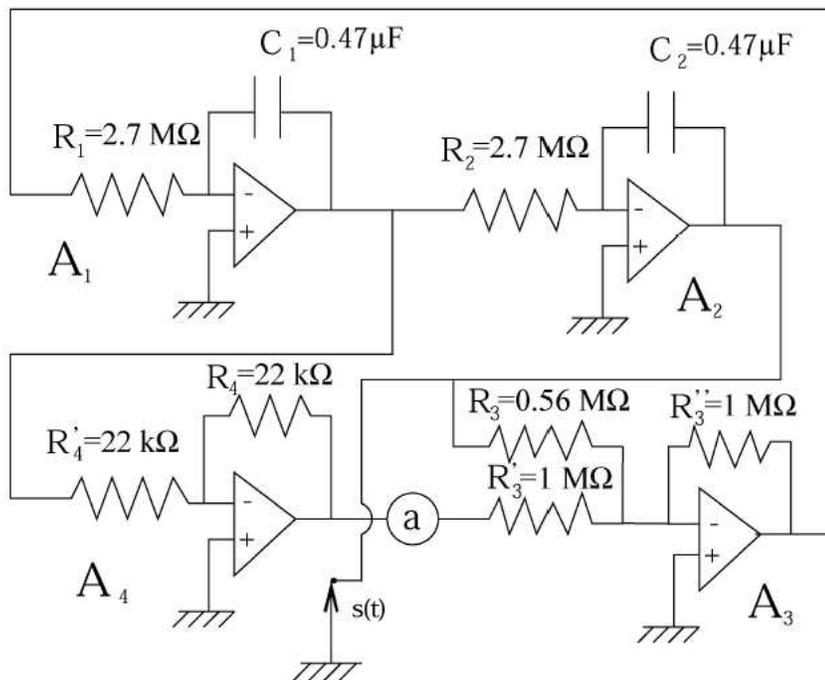


FIG. 2 - Schéma électrique du simulateur analogique.

2.3 Étude expérimentale

Dans cette partie, nous allons procéder à l'étude expérimentale du SLI déjà étudié théoriquement et représenté Fig. (2). Cette étude va être menée parallèlement dans le plan temporel (série temporelle) et dans le plan de phase (courbes de Lissajous). Les tracés s'effectueront d'abord dans le plan temporel $Y(t)$ puis en mode XY pour suivre les évolutions de $Y(t)$, non pas en fonction du temps, mais en fonction de $X(t)$.

Attention : Rappel Le calculateur délivre des tensions qui sont en réalité : $X(t) = -\frac{1}{G_2} \frac{ds}{dt}$ et $Y(t) = s(t)G_3$.

2.3.1 Position du problème

L'étude indicielle est l'étude des propriétés d'un système soumis à une entrée en échelon d' HEAVISIDE. pour réaliser cette étude, il suffirait donc de savoir générer un "front montant" et de l'appliquer à l'entrée du système étudié. Un générateur de fonction le permettrait. Toutefois, pour généraliser cette étude, nous allons utiliser un tout autre moyen. Celui-ci est basé sur le fait que le montage proposé possède des capacités (condensateurs) pouvant recevoir des CONDITIONS INITIALES (notées CI). Dans la pratique, on dit que l'on remplace l'étude INDICIELLE par l'étude d'essais de LACHERS. Pour réaliser cette étude, il nous suffit d'imposer une CONDITION INITIALE à l'intégrateur A1 (relatif à $-\frac{1}{G_2} \frac{ds}{dt}$). En fait, on peut imposer 2 conditions initiales :

1. l'une relative à $s(t)G_3$ par l'intégrateur A2
2. l'autre relative à $-\frac{1}{G_2} \frac{ds}{dt}$ par l'intégrateur A1.

On branchera la variable Y (respectivement X) du calculateur sur la voie CH1 (respectivement CH2) de l'oscilloscope numérique.

2.3.2 Réglage des C.I.

1. Placer le commutateur du calculateur sur "CI" puis choisir avec l'autre bouton de sélection, la position condition initiale 1 (respectivement 2) soit CI1 (respectivement CI2) correspondant au réglage de la condition initiale de la variable X (respectivement Y) visualisée sur la voie CH2 (respectivement CH1) de l'oscilloscope.
2. En agissant sur les 2 boutons pressoirs en bas à droite sur la face avant du calculateur, régler chaque condition initiale à la valeur imposée; la lecture de la tension se faisant directement sur le voltmètre intégré au calculateur ou en regardant sur l'écran de l'oscilloscope numérique (en réglant la base de temps sur 250ms/div.).
3. Pour lancer la résolution, régler d'abord la base de temps de l'oscilloscope sur 5s/div. puis choisir de ne visualiser que la voie CH1 (soit Y). Placer ensuite le commutateur du calculateur en position "CALCUL" pour visualiser la réponse du système sur l'oscilloscope.

2.3.3 Expérience pour $\zeta = 0$

Dans cette partie, le coefficient d'amortissement est nul et les conditions initiales sont :

1. pour A2 "C.I." = 2V (condition initiale sur $s(t)G_3$)
2. pour A1 "C.I." = 0V (condition initiale sur $-\frac{1}{G_2} \frac{ds}{dt}$).

Réaliser la visualisation de la réponse de la voie CH1 (soit Y) sur l'oscilloscope numérique en fixant la valeur du coefficient d'amortissement $\zeta = 0$ en ayant au préalable fixé la sensibilité verticale sur les 2 voies de l'oscilloscope à 1V/div. Dans le plan temporel, mesurer la période T_0 puis calculer la valeur de ω_0 et la comparer à la valeur attendue théoriquement. Dans le plan de phase, réaliser les essais suivants :

Essai	X(0)	Y (0)
n°1	0 V	2 V
n°2	2 V	0 V
n°3	-2 V	-2 V

2.3.4 Expérience pour $\zeta \neq 0$

Dans cette partie, le coefficient d'amortissement est non nul. Observer, pour différentes condition intiale, la trajectoire dans le plan de phase.