

TP Système, Partie II (2h maxi) :

Equations de Lorenz

O. Pannekoucke
olivier.pannekoucke@meteo.fr

12 février 2007

RESUMÉ

L'énoncé du TP est long. L'objectif n'est pas de tout faire le sujet est vaste et la recherche, en ce domaine, active. Le but est d'aborder l'étude de la dynamique non-linéaire au travers des équations de Lorenz. Ainsi, il sera observé que la réponse d'un système non-linéaire peut être particulièrement complexe. Une partie introductive est consacré à la convection de Rayleigh-Bénard. Le modèle de la particule est introduit pour mettre en évidence la nécessité des non-linéarités dans la nature (c'est une manière d'ébaucher votre analyse du cas de Lorenz). Ensuite un modèle heuristique plus complet pour la convection est mis en place : le modèle de Lorenz, dont les équations sont explicitées. Ainsi construit pas à pas, le lien avec la physique permet de comprendre le modèle de convection utilisé, facilitant en retour l'analyse raisonné des équations et de leur solutions.

Actuellement sous la forme de script Scilab, vous pouvez continuer l'exploration en téléchargeant le script à l'adresse : http://phymath.free.fr/n7_2007/tpsyst.sce . Des animations pour le modèle de Lorenz et pour d'autres modèles plus compliqués sont également présentés, à l'adresse <http://phymath.free.fr/modele/> .

MOT CLÉS: Convection de Rayleigh-Bénard, Modèle de convection de Lorenz, Équation de Lorenz, Sensibilité aux conditions initiales, orbite périodique, orbite non périodique, Transition vers la turbulence, Intermittence, Assimilation de données.

OBJECTIFS :

Phase d'observation

Introduction aux systèmes non-linéaire et à leur réponse : comparaison avec la réponse d'un système linéaire. Introduction de l'espace des phases : espace des degrés de liberté du système caractérisant son état au cours du temps. Représentation dans l'espace des phases d'une évolution temporelle. Visualisation de signaux complexes (série temporelle non stationnaire, analyse de Fourier versus analyse ondelette, section de Poincaré, etc). Observation de transitoire et de régime à temps long. Observation d'attracteur étrange. Notion de sensibilité aux conditions initiales. Visualisation d'orbite. Introduction de la notion de bassin d'attraction. Notion de régime permanent non nécessairement stationnaire. Introduction d'orbite périodique/non périodique. Mise en évidence d'un comportement complexe malgré des la dimension 3.

Phase de compréhension

Introduction de diagramme de bifurcation. Utilisation pour la mise en évidence d'une cascade sous-harmonique permettant d'aboutir à une solution non périodique. Introduction du mécanisme d'étirement-repliement responsable de la sensibilité aux conditions initiales. Description de l'intermittence de type I. Introduction à la méthode des retards dans l'étude de série temporelle de signaux complexes.

1 Introduction et recommandation

Cette partie du TP repose essentiellement sur l'approche numérique. La raison en est qu'elle permet une introduction simple, reproductible et autorise l'utilisation de méthode d'analyse puissante. Vous utiliserez le script Scilab "tpsyst.sce" en tant que boîte noire.

Chaque partie comporte une série de questions. Les questions sont là pour vous interpeler. Elles sont le support à votre observation raisonnée du système et à son étude. Un niveau de difficulté est attribué à chaque question : '11', '12' et '13'. Les questions '11' peuvent recevoir une réponse déduite des commentaires et de vos observations du système. Les questions '12' sont plus complexes, et demandent une réflexion plus importante de votre part. Enfin, les questions '13' sont des questions d'ouverture difficiles (n'y passez pas trop de temps).

Naturellement je suis là pour vous aider en cas de difficultés : **solicitez moi ! Ne restez pas bloqué, plus vous me sollicitez et mieux vous progresserez.** Pour votre compte-rendu, il n'est pas nécessaire de fournir des réponses longues, la plupart du temps, une à deux lignes sont souvent suffisantes. L'essentiel est dans la démarche, les idées et la méthode. Le reste dans l'humilité, la patience, le courage et la détermination.

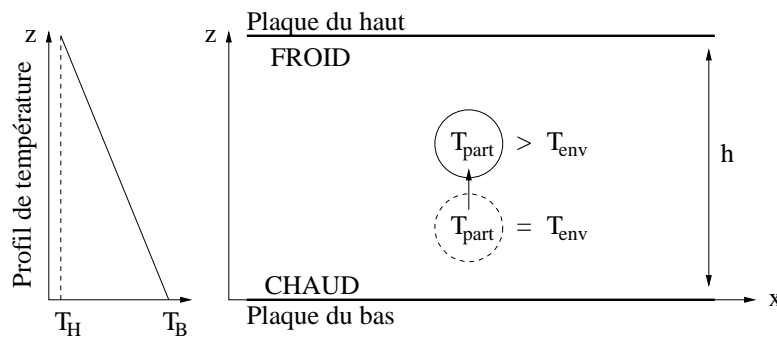


FIG. 1 – Expérience de convection confinée entre deux plaques chauffées.

"The more we learn about the world and the deeper our learning, the more conscious, specific and articulate will be our knowledge of what we do not know, our knowledge of our ignorance" (Karl Popper).

2 Introduction au modèle de Lorenz

2.1 Modélisation physique de la convection : Expérience de Rayleigh-Bénard

2.1.1 Mécanisme de la convection naturelle

La figure (1) représente un fluide confiné entre deux plaques chauffées et thermostatées (la température des plaques ne varie pas), espacées d'une distance h . Votre connaissance empirique de la nature vous permet d'imaginer que suivant la valeur de la différence de température $\Delta T = T_H - T_B$ entre la température de la plaque du haut T_H et celle de la plaque du bas T_B , un mouvement de convection s'installe (imaginez un radiateur de type "convecteur"). Votre intuition vous suggère que pour que la convection s'installe il faut nécessairement que $\Delta T > 0$, il est supposé en être ainsi dans la suite. Analysons physiquement ce mécanisme.

HYPOTHÈSES DE TRAVAIL :

L'état de base est le fluide au repos (vitesse du fluide nulle) et en équilibre thermique (profil de température linéaire). Il est supposé que l'équilibrage en pression est instantané au cours de tout mouvement (la pression n'est plus une variable d'état du système). La masse volumique est relié à la température suivant une relation linéaire $\rho = \rho_r [1 - \alpha(T - T_r)]$ avec $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dT} \right)$ le coefficient de dilatation thermique, ρ_r une masse volumique et T_r une température de référence. Dans la suite, toute vitesse dans l'écoulement est donc considérée comme une perturbation de vitesse (par rapport à l'écoulement de base statique). De plus le champ de température est décomposé sous la forme $T(x, z, t) = T_{lin}(z) + \theta(x, z, t)$ avec $T_{lin}(z) = T_B - \frac{\Delta T}{h}z$ le profil linéaire de base et $\theta(x, z, t)$ l'écart de température au profil linéaire. Le fluide en mouvement est supposé pouvoir glisser sur les parois. Ainsi, les conditions limites de vitesse sont de la forme $v_z(z=0) = v_z(z=h) = 0$ avec v_x non nécessairement nulle.

EXPÉRIENCE DE PENSÉE : MÉTHODE DE LA PARTICULE

Par une expérience de pensée, une particule de température et masse volumique (T_{part}, ρ_{part}) est déplacée vers le haut. Avec le profil de température supposé tel que $T_B > T_H$, la température T_{env} du fluide environnant la particule déplacé est plus faible, et la particule est plus légère que son environnement. **La poussée d'Archimède tend donc à accélérer le fluide vers le haut, l'entraînant à poursuivre son mouvement.** Cependant, si ΔT est trop petit, la force de viscosité vient concurrencer la poussée d'Archimède et freine, puis stop le mouvement. Naturellement, la particule ainsi au repos, se met à l'équilibre thermique avec son environnement. Ainsi les deux processus physique sont concurrent et de leur compétition naîtra, ou non, un mouvement de convection. Cette expérience introduit donc un écart de température critique ΔT_c au-dessous duquel le mouvement n'a pas lieu (domination des processus diffusif) et au-dessus duquel le mouvement s'installe (domination du processus convectif). Finalement l'écoulement est piloté par un paramètre adimensionné

$$r = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}, \quad (1)$$

avec absence de mouvement pour $r < 0$ et mouvement pour $r > 0$.

Partie Question :

- (a)-12- Connaissez-vous une manière de visualiser un tel mouvement de convection d'un point de vue expérimental.

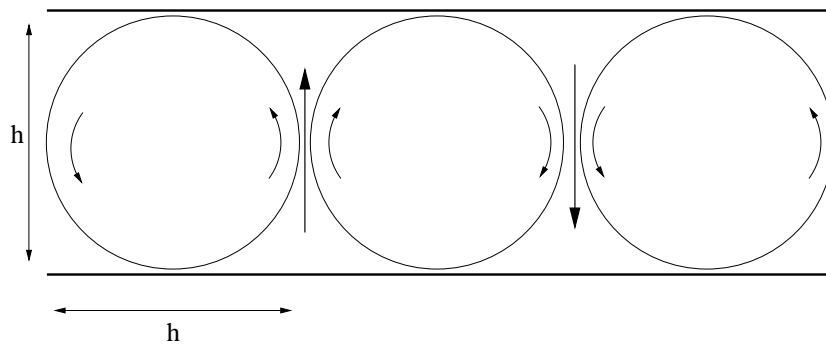


FIG. 2 – Rouleau de convection dont la longueur d'onde suivant la direction x est le double de la distance interplaque.

2.1.2 Approche heuristique simplifiée

L'expérience montre que la convection se traduit par l'apparition de rouleaux de convection. La figure (2) représente ces rouleaux. Il s'agit donc de motif dans l'espace donnant une vitesse verticale du fluide de la forme $v_z(x, z, t) = X(t)f_v(z) \cos(\pi h^{-1}x)$, avec $X(t)$ l'intensité du rouleau et $f_v(z)$ un certain profil vertical (que l'on peut expliciter suivant les conditions limites du problème, voir l'annexe). La vitesse verticale est donc un motif spatial dont l'intensité (et le sens varie) en fonction du temps. Il s'agit d'une séparation temps-espace. Cette forme simplifiée pour la vitesse provient du confinement qui contraint l'écoulement à respecter certaine configuration (mode propre du système). Ainsi, tout le problème revient à déterminer l'évolution temporelle de l'intensité $X(t)$ des rouleaux.

L'évolution linéaire de la perturbation de vitesse peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dX}{dt} = \sigma X, \quad (2)$$

avec σ le taux de croissance qui d'après la section précédente doit être fonction de r . Un développement polynomial en r donne nécessairement au premier ordre une relation de la forme $\sigma = \frac{r}{\tau}$, avec τ un temps caractéristique du système. En effet, cette expression reproduit bien l'amortissement pour $r < 0$ et l'amplification pour $r > 0$.

Naturellement, dans le cas $r > 0$, la perturbation croît de manière exponentielle et cette équation d'évolution n'est plus valable. La connaissance empirique amène à penser que la perturbation de vitesse va se stabiliser. Ceci n'est rendu possible que par l'intervention de **processus non-linéaire**. Cherchons donc le développement polynomial de σ en X . Or, le changement de signe $X \rightarrow -X$ correspond à un changement de rotation des rouleaux. Cette symétrie ne modifie en rien la nature physique du problème. Ceci conduit nécessairement à un développement d'ordre deux (au moins) donc de la forme

$$\tau\sigma = r - \frac{X^2}{b}, \quad (3)$$

avec b une constante homogène à X^2 représente une vitesse caractéristique mesurant l'intensité du couplage non-linéaire. Ce qui conduit à l'équation d'évolution

$$\tau \frac{dX}{dt} = rX - \frac{X^3}{b}, \quad (4)$$

dont on peut vérifier que pour $r > 0$ une solution attractive est $X(t \rightarrow \infty) = \pm\sqrt{rb}$, le signe indiquant le sens de rotation et dépendant des conditions initiales (sens, ou signe, de la perturbation initiale).

2.1.3 Approche heuristique améliorée

Naturellement, la convection représente physiquement, pour le système, un moyen de se **climatiser** (comme pour les mouvements atmosphérique dont la circulation générale temps à répartir l'excédent de chaleur des tropiques vers les pôles, excédent provenant du chauffage différentiel du soleil sur la rotondité terrestre). Ainsi, le mouvement implique d'une part un transport de chaleur par **advection** (ou **convection**). D'autre part, ce transport de chaleur va modifier le profil de température, ce qui influence l'intensité de la convection (au moins au niveau local). La figure (3) représente l'évolution possible du profil de température. Or le modèle Eq. 4, n'est pas capable de rendre compte de ce transport, encore moins de la rétroactions sur le profil de température. Cherchons donc un système plus compatible que celui, trop simple, exposé précédemment. Pour se faire, il est nécessaire d'introduire explicitement le transport et l'accumulation de chaleur.

Cela revient à projeter à l'ordre le plus bas la perturbation de température sur deux modes : un mode horizontal décrivant le transport vertical de température, et un mode vertical décrivant l'accumulation de température. L'intensité du premier mode est noté Y , celle du second mode est noté Z . La figure (4) représente ainsi les trois modes intervenant dans la modélisation simplifiée de la convection par Lorenz¹.

¹Mathématiquement, cela correspond à la projection de Galerkin de la dynamique sur les modes de Fourier (ou d'har-

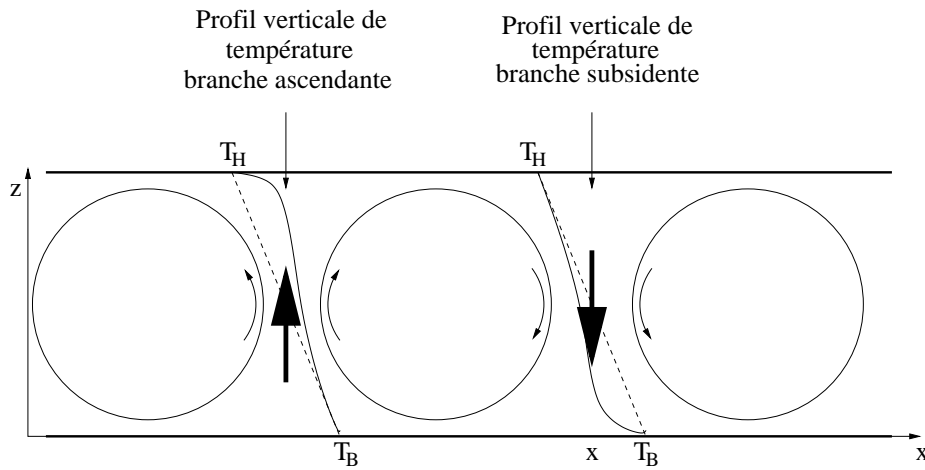


FIG. 3 – Exemple de profil de température à un instant donnée (juste après l'amorçage de la convection)

Ainsi, le modèle de Lorenz caractérise l'évolution temporelle de l'amplitude de ces trois modes "principaux" de l'écoulement suivant :

X Comme il a été vu, $X(t)$ est l'amplitude de la vitesse verticale. Ainsi, X est proportionnel à l'intensité du mouvement convectif.

Y Est l'amplitude de la différence de température entre la branche ascendante et celle subsidente. Par exemple, un mouvement où $X > 0$ et $Y > 0$ correspond à l'ascendance du fluide chaud et la subsidence du fluide froid, cette configuration correspond au schéma intuitif des premiers instant de la convection qui s'amorce. Autre exemple, un mouvement où $X > 0$ et $Y < 0$ correspond à l'ascendance du fluide froid et la subsidence du fluide chaud, cette configuration correspond au cas où la convection vient de s'activer et qu'une goutte chaude de fluide arrivée au sommet de la couche va être ramenée en position basse par la branche subsidente.

Z Est l'amplitude de la distortion du profil du gradient de température par rapport à la linéarité : une valeur nulle correspond à un gradient linéaire, tandis qu'une valeur positive indique que la température est plus uniforme dans le milieu du réservoir, et que les plus forts gradients se trouvent au voisinage des parois.

Pour plus d'information sur ces modes propres, reportez-vous à l'annexe.

EQUATION DU MOUVEMENT

L'équation du mouvement est décrite selon :

$$\text{Accélération} = \text{Poussé d'Archimède} + \text{Frottement Visceux}$$

Ces deux contributions étant en concurrence, elles doivent donc s'écrire de la forme σY pour la poussée d'Archimède et $-\sigma X$ pour la force visceuse (qui s'oppose au mouvement). Ici σ correspond physiquement à la constante de Prandtl qui caractérise la concurrence entre les deux processus diffusif (thermique/visceux). Ainsi,

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X) \quad (5)$$

EQUATION DU TRANSPORT DE CHALEUR : STADE LINÉAIRE

En considérant explicitement la perturbation de température. Son évolution est régit par :

$$\text{Evolution de la perturbation de Chaleur} = \text{Apport convectif} + \text{Diffusion thermique}$$

La première contribution, sans prendre en compte l'évolution du profil de température, est apporté par le mouvement de convection. Donc de la forme rX , avec r correspond à l'écart de température entre la plaque du haut et celle du bas. La diffusion thermique peut s'écrire $-Y$. Ainsi,

$$\frac{dY}{dt} = rX - Y \quad (6)$$

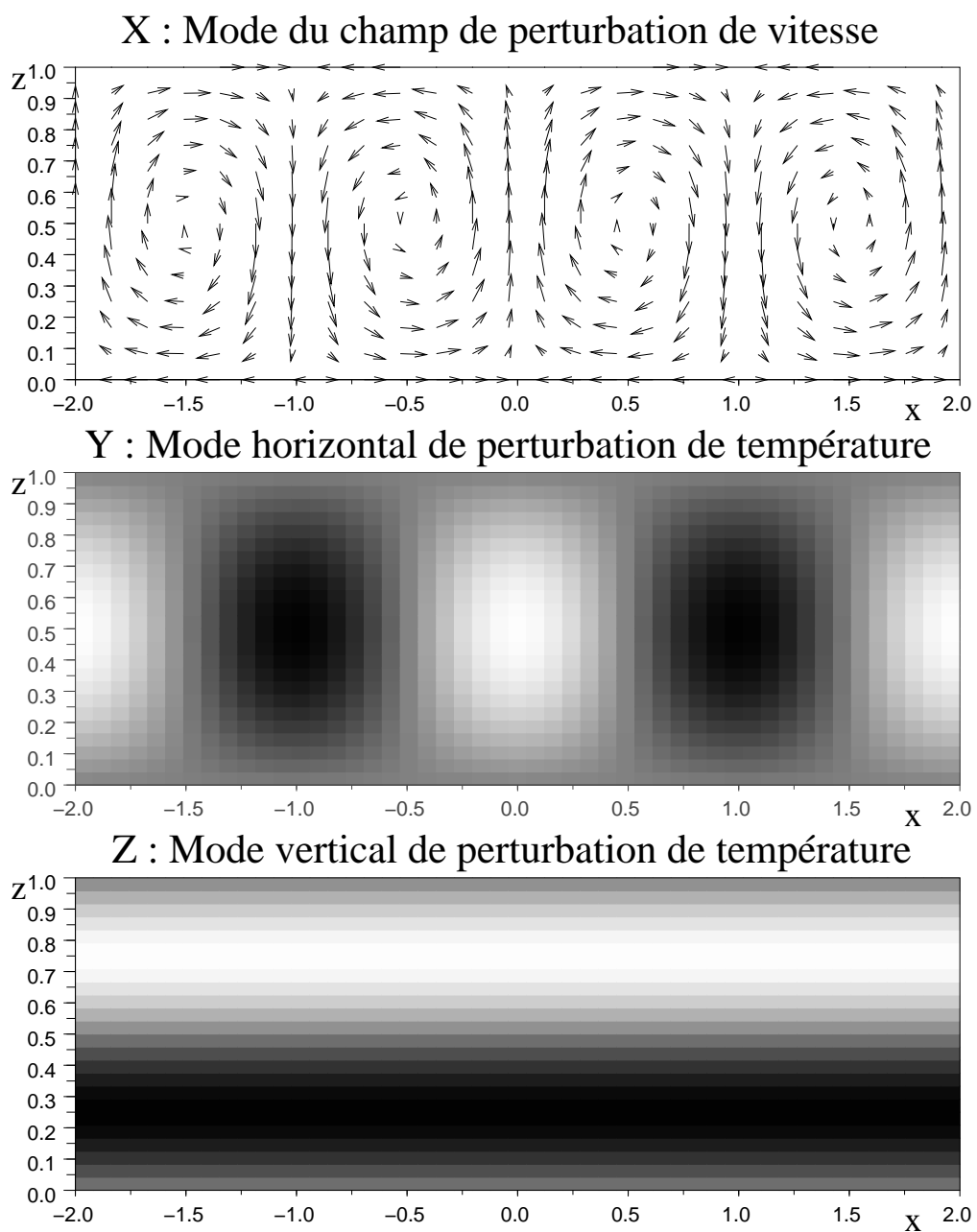


FIG. 4 – Les trois premiers modes propres de l'écoulement : mode propre associé à la perturbation de vitesse (haut), son amplitude temporelle est $X(t)$; mode propre horizontal associé à la perturbation de température (milieu), son amplitude est $Y(t)$; mode propre vertical associé à la perturbation de température (bas), son amplitude est $Z(t)$. Pour les modes propres de température, le blanc indique une amplitude positive maximale et le noir l'opposée. (Voir l'annexe pour les détails.)

EQUATION D'ÉVOLUTION DU PROFIL VERTICAL DE TEMPÉRATURE

Le profil vertical de perturbation de température évolue suivant l'apport de chaleur par convection et perte par diffusion suivant :

Evolution du profil de température = Apport par convection + Diffusion thermique

Pour une intensité de convection donné $X = Cst$, la concentration de la chaleur est proportionnelle au flux Y . Ainsi, $\partial_X Z = Y$. Pour un apport en température donnée $Y = Cst$, la concentration de la chaleur est proportionnelle à l'intensité de la convection X . Donc, $\partial_Y Z = X$. Ces dépendance implique de l'apport de chaleur par convection est de la forme XY . Le rappel au profil linéaire peut s'exprimer sous la forme $-bZ$ au stade linéaire. Ainsi,

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ \quad (7)$$

EQUATION DU TRANSPORT DE CHALEUR : STADE NON-LINÉAIRE

Naturellement, cette évolution du profil induit une réaction sur l'amplitude de la convection par diminution de l'intensité du mécanisme. ce qui peut s'exprimer en adaptant (8) sous la forme

$$\frac{dY}{dt} = (r - Z)X - Y \quad (8)$$

3 Système de Lorenz

Le modèle de convection de Lorenz repose donc sur l'évolution des amplitudes des modes les plus bas, dont la dynamique est décrit par le système de Lorenz :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X) \\ \frac{dY}{dt} = (r - Z)X - Y \\ \frac{dZ}{dt} = XY - bZ \end{cases} \quad (9)$$

Attention, les variables (X, Y, Z) ne sont pas des coordonnées d'espace géométrique! (cf. définition précédente). Classiquement, les paramètres sont fixé ainsi $\sigma = 10$ et $b = 8/3$, avec r variant, c'est le *paramètre de bifurcation*.

Ce système à la particularité d'être autonome (le membre de droite est indépendant du temps), couplé et non linéaire. Il n'existe pas de solution analytique aux équations de Lorenz.

L'ordinateur permet la résolution numérique de cette équation. En sélectionnant "simulation simple" puis "Run simulation" vous visualiser l'évolution temporelle des amplitudes $(X(t), Y(t), Z(t))$, le champ de vitesse et la température réduite $\frac{\theta}{\Delta T}$ de la convection, ainsi que quelques profils de température pour les positions $x = 0$, $x = 0.5$ et $x = 1.5$.

Partie Question :

- (a)-l2- Quel théorème des mathématiques pourriez vous invoquer pour décrire les solutions d'un tel système? (Existence, Unicité)
- (b)-l2- Connaissez-vous un paramètre couramment utilisé en mécanique des fluides et dont la valeur permet de renseigner sur le comportement turbulent ou non de l'écoulement. Que vous indique cette analogie avec le paramètre de bifurcation r ?
- (c)-l3- Donnez un exemple de manifestation d'un comportement non linéaire en mécanique des fluides? (Indication : comportement de la vorticité en écoulement 2D.)
- (d)-l3- Sauriez-vous expliquer physiquement pourquoi les amplitudes de la convection naturelle sont-elles confinées dans une région de l'espace des phases? Proposez une méthode pour donner les bornes de cet espace? (Indication : La température des plaques est fixée par thermostat.)

L'ordinateur permet la résolution numérique de cette équation. En sélectionnant "simulation simple" dans la fenêtre, observez les séries temporelle et la représentation fil de fer (3D), pour différents jeux de Condition Initiale (C.I.) et pour différentes valeurs du paramètre r . Vous pouvez selectionner différents graphiques : plan de phase, spectre, histogramme, ondelette, espace des phases, etc. Vous pouvez regarder tous ces outils. Par exemple : $(r = 10, X = 5, Y = 0, Z = 0)$, $(r = 28, X = 5, Y = 0, Z = 0)$, $(r = 28, X = -3, Y = 25, Z = 30)$, et $(r = 350, X = 22.97998, Y = -52.424503, Z = 350.78042)$.

Partie Question :

- (a)-l1- Décrivez à quoi correspond physiquement les conditions initiales suivante : $(X = 5, Y = 0, Z = 0)$, $(X = 0, Y = 5, Z = 0)$ et $(X = 0, Y = 0, Z = 5)$.
- (b)-l1- Commentez les résultats en fonction des valeurs de $r \in \{10, 28, 360\}$ (Allure de la solution, spectre, localisation dans l'espace, etc).

- (c)-l1- Commentez l'influence du choix des conditions initiales sur l'allure générale pour $r = 28$.
- (d)-l1- La solution pour $r = 28$ est souvent appelée "attracteur étrange". Qu'en pensez-vous? Dans le cas du système de Lorenz, on l'appelle même le "papillon de Lorenz".
- (e)-l2- Le **théorème de Poincaré-Bendixson** montre qu'en dimension 2 toute orbite solution de l'équation $\frac{dx}{dt} = f(x)$ (système autonome) restant dans un domaine compact du plan pour $t \geq 0$ est (i) ou bien une orbite périodique (ii) ou bien tend vers une solution périodique (iii) ou bien tend vers un point fixe. Que pensez-vous de l'extension de ce théorème en dimension 3?

4 Sensibilités aux conditions initiales

Dans la section "sensibilité aux conditions initiales" du script, $r = 28$ avec les C.I. ($X = -3, Y = -5, Z = 15$). On perturbe légèrement X d'une valeur de dX (la précision machine est $\%eps$). Observez deux solutions de l'intégration de deux conditions initiales ($X = -3, Y = -5, Z = 15$) et ($X = -3 + dX, Y = -5, Z = 15$). Diminuer la valeur de dX , par exemple $dX \in \{1e-3, 1e-4, 1e-5, 5 * \%eps, 2 * \%eps\}$.

Partie Questions :

- (a)-l1- Commentez l'expression "sensibilité aux conditions initiale".
- (b)-l3- Proposez un mécanisme simple pour la croissance de l'erreur et son comportement (on pourra raisonner sur l'évolution de la différence $\delta x(t)$ le long de la trajectoire dans l'espace des phase (X, Y, Z)).
- (c)-l1- Pourquoi l'erreur se stabilise-t-elle et ne tends pas vers l'infini?
- (d)-l2- Que pensez vous de la pertinence des résolutions numériques (réputé sensible aux erreurs d'arrondi)?
- (e)-l3- Pour décrire ce type de système, on parle de chaos déterministe. Pourriez-vous expliquer cette expression? Que se passerait-il dans le cas où le système était bruité, comme pour l'équation $\frac{dx}{dt} = x + \epsilon$ avec $\epsilon(t)$ la réalisation d'une variable Gaussienne centrée. (Ce type d'équation est appelé "équation différentielle stochastique").

5 Ingrédients du chaos déterministe

L'article de Lorenz (1963) s'intitule "Deterministic nonperiodic flow". De quel mécanisme provient cette propriété de non périodicité? De plus d'où provient cette sensibilité aux conditions initiales? C'est l'objet de cette section.

5.1 Vers un comportement non périodique

5.1.1 Introduction au diagramme de bifurcation

Considérons l'équation différentielle $\frac{dX}{dt} = rX - X^3$, il s'agit d'une équation différentielle dépendant du paramètre $r \in \mathbb{R}$. Pour caractériser les solutions qualitativement, on recherche les points singuliers, ce qui revient à résoudre $\frac{dX}{dt} = 0$. Les solutions sont triviales : pour $r < 0$ il y a une solution unique $X = 0$, tandis que pour $r > 0$ il y a trois solutions $X \in \{-\sqrt{r}, 0, \sqrt{r}\}$. Est-ce que les points singuliers sont stable ou instable? En d'autre terme, si une condition initiale est fixée dans un voisinage d'un point singulier, la solution aura-t-elle tendance à s'approcher ou à s'éloigner du point singulier? Pour réaliser cette étude, on procède de manière classique par un changement d'origine et une étude de perturbation : on linéarise au voisinage du point singulier. Formellement, si $X(t)$ désigne la trajectoire de la solution ayant comme condition initiale $X(0)$ et $(X + \delta X)(t)$ la trajectoire de la solution ayant comme condition initiale $(X + \delta X)(0)$, l'équation d'évolution de la perturbation pour le système $\frac{dX}{dt} = f(X)$ n'est autre que $\frac{d\delta X}{dt} = \frac{d(X + \delta X)}{dt} - \frac{dX}{dt} = f(X) - f(X + \delta X) = df_{X(t)}\delta X(t) + \mathcal{O}(\delta X(t)^2)$.

Le plus simple est naturellement l'étude de la stabilité du point singulier $X = 0$. Dans ce cas, l'équation linéarisée n'est autre que $\frac{d\delta X}{dt} = r\delta X$. La solution de cette équation est donc de la forme $\delta X(t) = C^{ste} e^{rt}$, C^{ste} étant la constante d'intégration. Si $r < 0$, la perturbation tend vers zéro avec le temps t . Par contre, si $r > 0$, la perturbation croît vers l'infini. Ainsi le point singulier $x = 0$ est stable pour $r < 0$: la dynamique tend à ramener l'écart infinitésimal au point singulier vers celui-ci. A l'inverse, pour $r > 0$, la dynamique tend à l'en éloigner : le point singulier est alors instable. Un raisonnement similaire pour les points fixe $X = \pm\sqrt{r}$ permet de montrer que les perturbations sont pilotées par l'équation $\frac{d\delta X}{dt} = -2r\delta X$. Il vient alors que ces deux points sont stables.

La Fig. (5) représente le diagramme de bifurcation de cette dynamique simple. Il permet de représenter de manière synthétique la nature des solutions.

Partie Questions :

- (a)-l1- Que pensez-vous de l'utilité du diagramme de bifurcation Fig. (5)?
- (b)-l2- Pour un système complexe dont le comportement reste borné, une dynamique s'installe après un transitoire. Proposez une méthode expérimentale pour réaliser un diagramme de bifurcation empirique d'un système.

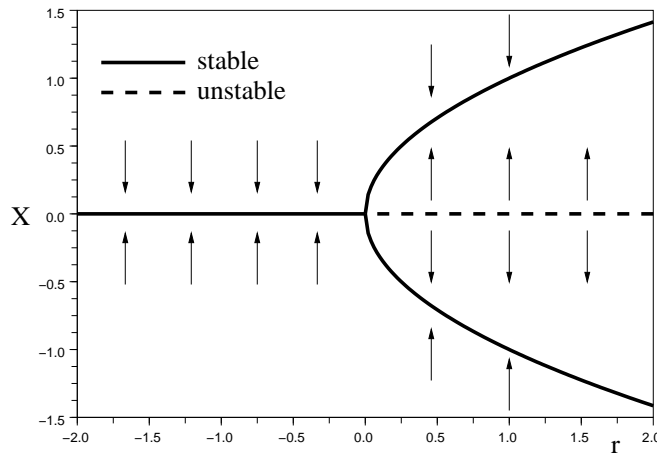


FIG. 5 – Diagramme de bifurcation pour l'équation $\frac{dX}{dt} = rX - X^3$. En trait continu, les positions des points singuliers suivant la valeur du paramètre de contrôle. En trait pointillé, celle des points singulier instables. Les flèches représentent le bassin d'attraction de chaque point singulier. Les flèches verticales montrent l'évolution de la solution pour une condition initiale prise dans un bassin d'attraction donné.

- (c)-l3- Que pensez-vous du caractère observable de trajectoire instable dans la nature? Que vous suggère la présence de petit paramètre dans la modélisation physique d'un système. Indication : pensez au problème du pendule vertical forcé par deux ressort de même raideur quasiment égale, mais non égale.
- (d)-l3- Pouvez-vous faire le lien avec la modélisation de la convection et ces nouvelles connaissances? Indication : Analysez le système de Lorenz au voisinage du seuil, où la dynamique de la convection est très lente (le taux de croissance est $r - 1 \ll 1$).

5.1.2 Diagramme de bifurcation pour le système de Lorenz

Le calcul du diagramme de bifurcation dans le cas de Lorenz étant assez coûteux (pour une séance de deux heures), épargnions vos machines en vous le présentant Fig. (6). Ce digramme représente, pour le comportement à long terme, les maxima successifs Z_k de Z (en réalité on représente $Z_k - r + 1$) fonction des valeurs de r .

Partie Questions :

- (a)-l1- En décomposant le comportement générale d'une solution en une partie transitoire et une partie parmanante, justifier l'intérêt apporté au comportement pour un temps long.
- (b)-l2- A partir de l'étude du diagramme de bifurcation empirique et de votre connaissance des solutions (pour certaines valeurs de r), donner une description rapide de la nature des solutions suivant la valeur du paramètre r .

5.1.3 Application logistique

Un comportement complexe peut être mis en évidence dans des applications même très simple. Prenons le cas de la suite $x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$. Cette application est appelée "application logistique", la fonction assoxié à la récurrence est quadratique $f(x) = r(1 - x)x$, son graphe est donc une parabole. Comme pour le système de Lorenz, r est un paramètre et on s'intéresse à la nature des solutions suivant ses valeurs. Une simulation en est faite à l'aide du script : sélectionnez "Diagramme de bifurcation fct logistique". Dans ce cas, en partant d'une condition initiale $x_0 = 0.25$, la solution converge vers une point fixe pour $\mu = 2$. D'autre solution sont présentées, ainsi que le digramme de bifurcation suivant r .

Partie Questions :

- (a)-l1- Commentez les cas $r \in \{3.2, 3.6\}$. En particulier, discuter de la présence d'un 2-cycle limite pour $r = 3.2$, de son origine et son devenir suivant la valeur du paramètre μ , d'après le diagramme de bifurcation. (Rappel : un p -cycle est une orbite périodique telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+p} = x_n$)
- (b)-l1- En agrandissant le diagramme de bifurcation de l'application logistique, observer l'apparition de cycle de période double du cycle précédent en fonction de r .
- (c)-l2- Sachant qu'une des caractéristiques des systèmes dit chaotique est la présence d'orbite non périodique, proposé un mécanisme simple, déduit du diagramme de bifurcation, pour la création d'une orbite de période de plus en plus longue. (Indication : un tel mécanisme est appelé "cascade sous-harmonique")

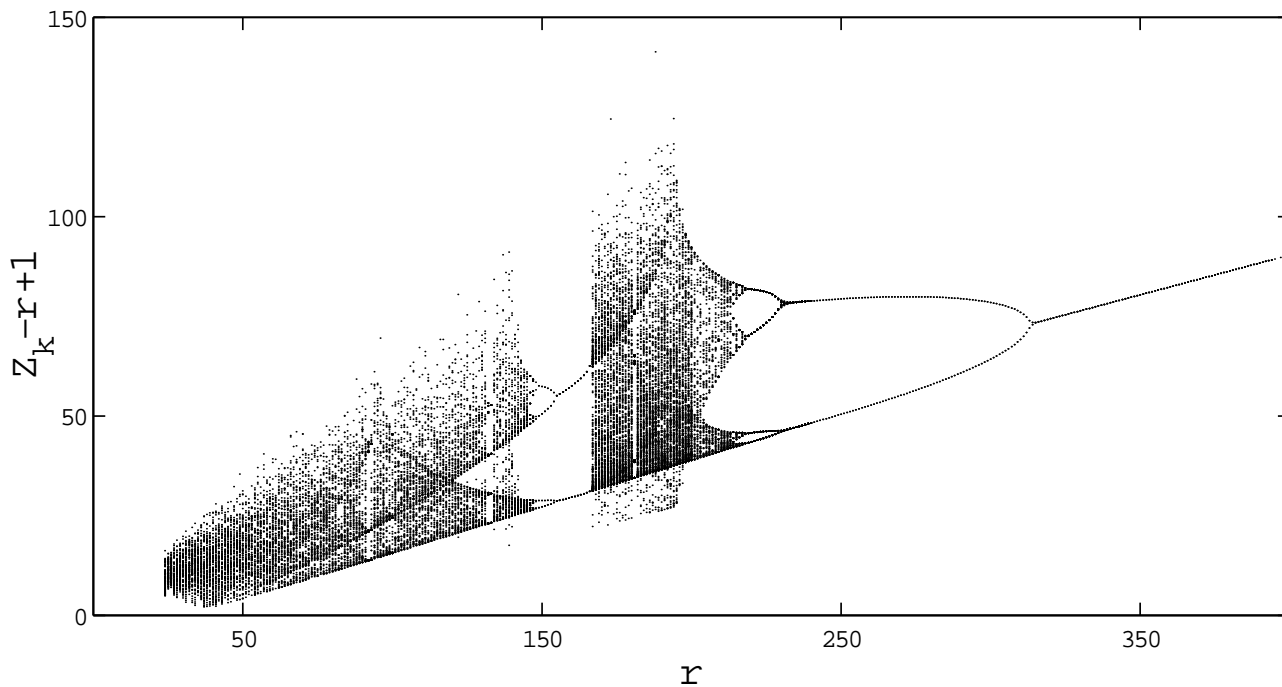


FIG. 6 – Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre r . Représentation des maxima successifs de $Z_k - r + 1$. (D'après Manneville)

5.1.4 Application de Lorenz

Poincaré a été l'un des premiers à étudier les systèmes dynamique non pas via leur solution directe mais groupe de solution dans l'espace des phase. Dans ce contexte, on ne s'intéresse plus à une solution, mais à un groupe de solutions : un flot dans un champ de vecteur. En particulier, Poincaré a introduit une méthode pour l'études des orbites périodiques : en considérant une surface \mathcal{S} (section) dans l'espace des phases et en considérant un point M de cette section, il observe l'intersection $\Phi(M)$ de la trajectoire issue de M et coupant \mathcal{S} . Cette construction définit une application $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. En poursuivant le procédé, on construit une suite : $M_0 = M, M_1 = \Phi(M_0), M_2 = \Phi(M_1), \dots$. Finalement on transforme l'analyse du système dynamique sous la forme d'étude de suites.

Dans le cas du système de Lorenz, une section facile à mettre en place est $\mathcal{S} : XY - bZ = 0$. Elle correspond à $\frac{dZ}{dt} = 0$ et donc cela revient à déterminer les maxima successif de la série temporelle de Z . Soit Z_k la suite des maxima successif. En représentant Z_{k+1} en fonction de Z_k on obtient l'application de Lorenz. Observez l'application de Lorenz dans le cas $r = 28, X = 5, Y = 0, Z = 0$ et prenant $Tmax$ grand.

Partie Questions :

- (a)-l1- Comparez l'application de Lorenz avec l'application logistique. Des similarités ?
- (b)-l1- En zoomant sur l'application de Lorenz, est-ce que l'on a un trait ou un nuage de points ?
- (c)-l2- Deduire les mécanismes simple présent dans l'attracteur de Lorenz et pouvant expliquer sa complexité, malgré sa simplicité.
- (d)-l2- A partir de l'étude du diagramme de bifurcation du système de Lorenz Fig. (6) donner une plage de valeur pour laquelle il existe une cascade sous-harmonique. Cela conforte-t-il votre analyse par analogie au comportement de l'application logistique ?

5.2 Un mécanisme pour la sensibilité aux C.I.

Dans la section précédent (5.1.4), l'application de Lorenz à été introduite. Observez attentivement le graphe de cette application et comparez-le avec celui de l'application logistique. Dans le cas de l'application logistique, expliquez comment une erreur sur les conditions initiales peut s'emplifier (étirement) avec la branche croissante et comment l'information est ensuite réinjecté dans cette zone à l'aide de la branche décroissance (repliment). Indication : Observer que la pente de la branche croissante est supérieure à l'unité.

Concluez sur les présences de sensibilité aux conditions initiale dans le système de Lorenz et du rôle des non-linéarités dans ce mécanisme.

6 Intermittence dans le système de Lorenz ?

6.1 Observation de l'intermittence dans le système de Lorenz

En prenant pour condition initiale ($X = 5, Y = 0, Z = 0$), représentez la série temporelle de Y et la section de Poincaré suivant Y pour $r = 166$, puis de $r = 166.2$ et aussi $r = 166.35$. **Qu'observez-vous ?**

6.2 Approche théorique de cette intermittence

Pour expliquer vos observations du système de Lorenz, un modèle est introduit pour l'application de premier retour de Poincaré (Pomeau and Manneville 1980). Il s'agit de l'endomorphisme sur le cercle S^1

$$\theta \longrightarrow 2\theta + r \sin 2\pi\theta + 0.1 \sin 4\pi\theta \text{ [mod 1]}. \quad (10)$$

Cet endomorphisme est étudié au voisinage du paramètre de bifurcation $r_c = 0.24706$. Numériquement, l'application est calculée avec $\delta r = r - r_c$.

En sélectionnant dans le menu principal "intermittence de type I". Dans parametre, choisissez une valeur de $\delta r < 0$ ($\delta r = -0.01$ convient bien). Puis faites "Plot graphe". Qu'observez-vous? Faites de même pour $\delta r > 0$ ($\delta r = 0.01$ convient). **Qu'observez-vous ?** Maintenant, représenter le diagramme de bifurcation de cette application. **En déduisant qu'il y a un bifurcation d'un "régime stationnaire" vers un "régime chaotique" pour $\delta r = 0$, expliquez cette bifurcation en étudiant l'évolution des points fixes apparaissant au voisinage de $\theta = 0.28$ pour $\delta r < 0$.**

Pomeau and Manneville (1980) ont proposés une transition vers la turbulence basé sur la notion d'intermittence. L'intermittence, dans la pensée courante, se manifeste par l'appartion dans un écoulement laminaire (écoulement stable, régulier : prédictible) de bouffées turbulences (écoulement très perturbé, aléatoire, caractérisé par une zone de mélange... imprédictible). **Reliez vos conclusions à la notion d'intermittence en la caractérisant dans le cas précis de cette étude.**

Dans le cas du système de Lorenz, le paramètre critique est au alentour de $r_c = 166.06$.

Notez que l'on a également un comportement similaire pour l'application logistique au voisinage de $r_c = 1 + \sqrt{8} \approx 3.828142$ (pour cela vous pourrez étudier le graphe de f^3 au voisinage de r_c).

7 Emergence d'une dynamique complexe : Méthode des retards

En pratique, pour un système réel, le nombre de degré de liberté du problème est très grand. Pour l'atmosphère, il est de l'ordre de 10^6 dans les modèles de prévision numérique actuel. Autant dire qu'il est impossible de "visualiser" un attracteur (s'il en existe un). De plus ces degrés de liberté ne sont pas nécessairement des variables facile à manipuler tel que la vitesse ou la température. En général, une décomposition de type Helmholtz² est utilisé, transformant le champ de vitesse (grandeur vectoriel) en champ de tourbillon et divergence (grandeur scalaire). Ainsi, le système peut être étudié à l'aide d'*observables* qui ne sont pas directement issues de l'espace des phases. Par exemple, en météorologie, on regardera au final le champ de vent (donc la vitesse du fluide) plutôt que le tourbillon.

Ainsi dans bien des cas pratiques, le système n'est pas étudié directement, et n'est connu que par des séries temporelles. Comment dégager un comportement complexe à l'aide de ce type de donnée?

Takens (1981) a proposé une méthode dans laquelle au lieu de représenter l'espace des phases sous la forme $(X(t), Y(t), Z(t))$ (dans l'exemple de Lorenz naturellement), il le représente sous la forme $(X(t), X(t+T))$. Dans la pratique, si la série temporelle correspond aux mesure du système échantillonné tous les T_s , on obtient une série temporelle X_i . Ainsi, T devient un indice et l'on représente par exemple (X_i, X_{i+10}) . Cette représentation est appelée *méthode des retards*.

Observez les plans de phase déduits des séries temporelles de X (sélectionnez ce graphique dans la liste qui vous est proposée).

Partie Questions :

- (a)-l1- Commentez vos observations issues de la reconstitution de la dynamique à partir de la méthode des retards.
- (b)-l3- Proposez une explication de la démarche de la méthode des retards.

8 Et les prévisions météorologiques ?

8.1 Généralité

Au vu du système de Lorenz, on pourrait naïvement penser que plus le système se complexifie et plus il est effectivement complexe. Rien n'est moins certain.

² $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi + \nabla\phi$, avec ψ la fonction courant et ϕ le potentiel. Le tourbillon vertical est $\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \Delta\psi$ la divergence horizontale est $\eta = \nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta\phi$.

L'utilité principale de ce type de système est qu'il permet de simuler des comportements complexe avec un simple ordinateur de bureau. Imaginez le gain de temps : lancer une simulation prends quelques secondes. Naturellement, un tel système de présage en rien du comportement réel de l'atmosphère. Rien ne dit que la dynamique n'est pas "plus simple" pour l'atmosphère. En effet, nombre de degrés de liberté ne sont pas significatif et on peut montrer qu'une part importante de la dynamique se projette sur une variété (ou un attracteur) de plus petite dimension que celle de l'espace des phases météorologique.

Ces questions sont en particulier soulevées par Robert and Sommeria (1991). Une illustration est donnée dans les articles de vulgarisation de Robert (2001, 2003)³.

Partie Questions :

- (a)-12- Connaissez-vous les équations qui régissent le fluide atmosphérique ?
- (b)-13- Savez-vous s'il en existe des solutions ?
- (b)-11- Quel sont d'après vous les étapes pour mettre en place une prévision météorologique opérationnelle ?
- (f)-12- De votre culture en traitement du signal, quel est le résultat le plus important au monde qui autorise (peut être) l'utilisation de l'ordinateur pour les simulations numériques ? (sans lequel nous serions encore au Moyen Âge!!)
- (e)-13- Que pensez vous de la question de Marie Farge : "L'approche numérique : simulation ou simulacre des phénomènes ?" (Farge 1988).

Pour donner un ordre d'idée, à Météo-France, la durée pour déterminer les conditions initiales de l'atmosphère est de l'ordre de 30 minute, une prévision à pleine résolution prends un temps similaire. Dans le passé cette proportion était très différente. En effet, l'étape de détermination des conditions initiales était très réduite (maximum 5% du temps) et le gros du travail était l'intégration du modèle non linéaire (95% du temps).

8.2 Détermination des conditions initiales : l'assimilation de données

Le cas l'atmosphère (ou de l'océan), est particulièrement complexe. En effet, plusieurs contraintes apparaissent : le nombre d'observations disponible est trop petit par rapport au nombre de degré de liberté du problème, les observations sont bruitées, les prévisions sont sensible aux conditions initiales, on souhaite avoir rapidement les prévisions (contrainte opérationnelle forte).

Pour fixer les idées, le nombre de degrés de liberté de la version numérique de l'atmosphère est de l'ordre de 10^6 , ils sont ordonnés dans un vecteur \mathbf{x} . C'est la dimension de l'espace des phases, il s'agit également du nombre de mode sur lequel on projette la dynamique atmosphérique. Dans le cas du modèle de Lorenz, l'espace des de dimension 3 (amplitude des trois modes : vitesse, horizontal de température et vertical de température). Le nombre d'observations disponible est de l'ordre de 10^5 , elles sont odronnées dans un vecteur \mathbf{y} . Ce sont les données satellitaires, les mesures terrestres, les avions, les bateaux, et les très important ballons sondes (radiosondage). Naturellement, il est possible de faire le lien entre un état de l'atmosphère est une mesure. Cette opération est réalisée à l'aide d'une transformation \mathcal{H} telle que $\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathbf{x})$. Par exemple, on est capable de convertir un état \mathbf{x} (température, pression, humidité, vent) sous forme de radiance : rayonnement électromagntique mesuré par un satellite, ce qui correspond à un certain type d'observation \mathbf{y}_{sat} (restriction de \mathbf{y}). Ainsi l'opérateur \mathcal{H} peut être non-linéaire et non trivial comme l'exemple l'indique. Ainsi, l'objectif est de trouver l'état \mathbf{x}_t (t pour *true*) tel que

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathbf{x}_t). \quad (11)$$

Mais ce problème n'est pas fermé : il y a plus d'inconnue (10^6) que de connue (10^5). Actuellement, les grands centre de prévision numérique (comme à Météo-France) utilise une méthode de prédiction-correction : il s'agit d'introduire une information supplémentaire appelé ébauche qui est un champ connu et de l'ajuster aux observations. En général, l'ébauche est issue de la dernière prévision calculée. Elle est noté \mathbf{x}_b . La théorie du contrôle optimal permet de fournir l'état le plus probable de l'atmosphère au vue des observations et de cette ébauche, il s'agit de l'état analysé \mathbf{x}_a (analyse dites objective, par opposition à subjective qui dans le temps était réalisée par un météorologue à la main!). Cet état s'écrit

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathcal{H}(\mathbf{x}_b)), \quad (12)$$

où $\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$ est la matrice de gain, avec \mathbf{H} le linéairisé de \mathcal{H} en \mathbf{x}_b , \mathbf{R} la matrice de covariance d'erreurs d'observations et \mathbf{B} la matrice de covariance d'erreur de prévision. Le symbole T indique ici la transposition. De manière générale il s'agit de l'adjoint de l'opérateur linéaire. L'un des problèmes majeurs est justement de représenter cette dernière matrice dont la taille est de l'ordre de 10^{12} : il est impossible de la stocker en machine! Ces matrices de covariances représentent la dispertion des erreurs et donc l'incertitude sur les états. Naturellement, une part incrompressible d'incertitude demeure après cette analyse, elle est caractérisée par la matrice de covariance d'erreur d'analyse

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B}. \quad (13)$$

Ainsi les probabilités s'introduisent tout naturellement dans la prévision du temps à travers la spécification des conditions initiales. Cette incertitude va croître au stade linéaire. Ainsi, en désignant par \mathcal{M} l'intégration par le

³Robert 2001, voir aussi : smf.emath.fr/Publications/Gazette/2001/90/smf_gazette_90_11-25.pdf

modèle numérique, la prévision $\mathbf{x}_b^+ = \mathcal{M}(\mathbf{x}_a)$ est utilisé comme ébauche. L'incertitude est caractérisée par la matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{B}^+ d'après

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{MAM}^T, \quad (14)$$

avec \mathbf{M} le modèle linéaire tangent, qui correspond à la linéarisation de la trajectoire autour de la prévision d'état initial \mathbf{x}_a (formellement d'après le développement de Taylor : $\mathcal{M}(\mathbf{x}_a + \delta\mathbf{x}) - \mathcal{M}(\mathbf{x}_a) = \mathbf{M}\delta\mathbf{x} + \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{x}\|^2)$). Les équations (12 à 14) sont celles du filtre de Kalman.

D'autre perfectionnement pourrait être expliciter. Par exemple la projection de l'analyse \mathbf{x}_a sur les modes lent de l'atmosphère (mode/onde de Rossby) en éliminant les modes rapides (onde d'inertie-gravité). Il s'agit de la phase d'initialisation dans le schéma d'assimilation de données. En effet, les premières prévisions numériques (dans les années 1950) présentaient des oscillations hautes fréquences abérantes. Ils s'agissait d'onde rapide d'inertie-gravité qui sont solution des équations primitives⁴. La présence de ces ondes est associé à des déséquilibres dans l'état analysé, ainsi à la manière d'un caillou qui jetté dans l'eau engendre des ondes de surface, le modèle numérique cherche à s'équilibrer en produisant des ondes d'inertie gravité (ajustement géostrophique). Cette opération correspond à la projection sur une variété⁵ de dimension nécessairement inférieur à 10^6 . Au cours de l'intégration numérique, des filtres temporels sont appliqués pour se prémunir de l'apparition de telle ondes garantissant ainsi une évolution sur cette surface de mode lent. Finalement, ces approches sont similaires à celle de Lorenz...

Voici succinctement la manière dont les incertitudes aux conditions initiales sont prises en compte dans les prévisions météorologique. Naturellement, la dimension du problème rend cette théorie impossible à mettre en place. En particulier l'équation (14) et ce sont plusieurs cycle mis en parallèle d'analyse-prévision qui mime la résolution de ces équations. Ensuite la qualité des prévisions tient grandement à ce cyclage : si vous avez de bonne prévision, vous aurez de meilleurs analyse donnant une meilleur prévision (c'est plus compliqué, mais schématiquement, c'est ça!). La phase d'assimilation de données est fondamentale. Pourtant on ne l'a pas compris tout de suite. Ce n'est que depuis une quinzaine d'année que les techniques ont commencés à se perfectionner (Daley 1991, Bouttier 1993, une avancée majeur : Courtier *et al.* 1994,..., et des développements récent : Pannekoucke *et al.* 2007).

D'autres techniques sont mises en place pour analyser la sensibilité aux conditions initiales à un instant pour une situation météorologique donnée. La méthode actuellement utilisée est la méthode des vecteurs singulier. Elle consiste à réaliser des prévisions à partir d'états perturbés suivant des modes instables vérifiant un maximum de croissance linéaire optimisé sur une période donnée. C'est ce qui conduit à fixer l'indice de confiance que l'on peut voir le Dimanche soir sur TF1 : pour les prévisions à sept jours, il s'agit d'un indice entre 1 et 5, 1 pour une prévision peu fiable et 5 pour une prévision très fiable.

9 Questions ouvertes et prolongement

1. Dans l'optique de la démarche heuristique adoptée au cours de ce TP, à partir de vos connaissances en mécanique des fluides, ou de vos notions sur la turbulence, proposez un mécanisme possible pour la transition dans un écoulement de fluide qui se définit comme le passage d'un état relativement stable, ordonné, laminaire, à un état désordonné, erratique, turbulent.
2. Au vu des caractéristiques intrinsèques du système mises en relief précédemment, proposer une méthode mathématique permettant de contrôler un système chaotique de manière à supprimer son "imprévisibilité".
3. Cette méthode est-elle réalisable en pratique pour un système de prévision météorologique numérique?

Vous pouvez consulter le très récent livre de Lettelier (2006) sur le chaos, il récapitule l'histoire et la progression de la compréhension des systèmes dynamiques. La référence sur le système de Lorenz est Sparrow (1982). Naturellement, la lecture approfondie du livre de Paul Manneville (2004).

10 Annexe : Description des modes propres du modèle de Lorenz

10.0.1 Mode propre de vitesse

Au cours de cette présentation nous avons rappelé la décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteur, il s'agit de la décomposition de la vitesse sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi + \nabla\phi$, avec ψ la fonction courant et ϕ le potentiel. $\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \Delta\psi$ la divergence horizontale est $\eta = \nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta\phi$.

Dans le cas de la convection, il est supposé que le fluide est incompressible (sauf dans l'équation du mouvement vertical, il s'agit de l'hypothèse de Boussinesq). En particulier, d'après l'équation de continuité, cela implique que la

⁴Équation de Navier Stokes filtrées pour ne conserver que les solutions météorologiquement intéressantes. Par exemple, l'hypothèse d'anélasticité remplace l'équation de continuité $\partial_t\rho + \text{div}\rho\mathbf{v} = 0$ par $\text{div}\rho\mathbf{v} = 0$, ce qui supprime les variations temporelle de masse volumique et donc les ondes sonores, tout en permettant une variation spatiale de la masse volumique fondamentale pour la stratification verticale

⁵Une variété de dimension p est une surface dans un espace de dimension n avec $p \leq n$.

divergence est nulle. Donc le champ de vitesse est entièrement déterminé par la connaissance de la fonction courant ψ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi$.

Lorenz ne retient dans les équations de la mécanique des fluides que le premier mode propre pour ψ qui est

$$\psi(x, z, t) = X(t)\sqrt{2}\sin(\pi ah^{-1}x)\sin(\pi h^{-1}z). \quad (15)$$

D'où il en est déduit le mode propre de vitesse (vectorel cette fois)

$$v_x(x, z, t) = -\partial_z\psi = -X(t)\sqrt{2}\pi h^{-1}\sin(\pi ah^{-1}x)\cos(\pi h^{-1}z), \quad (16)$$

$$v_z(x, z, t) = \partial_x\psi = X(t)\sqrt{2}\pi ah^{-1}\cos(\pi ah^{-1}x)\sin(\pi h^{-1}z). \quad (17)$$

C'est ce champ de vecteur qui est représenté dans les simulations et Fig.4, fig. du haut.

10.0.2 Modes propres de température

Pour le champ de température, Lorenz ne retient que les deux premiers modes. Le mode le plus bas correspond au mode horizontal caractérisant le déplacement vertical de chaleur (Fig.4, fig. du milieu), il s'écrit

$$TH_H(x, z) = \sqrt{2}\cos(\pi ah^{-1}x)\sin(\pi h^{-1}z). \quad (18)$$

Le premier mode de degré supérieur est un mode vertical caractérisant la stratification de température (Fig.4, fig. du bas), il s'écrit

$$TH_V(x, z) = -\sin(2\pi h^{-1}z). \quad (19)$$

Ainsi, pour l'écart au profil linéaire, Lorenz obtient la décomposition

$$\frac{\theta(x, z, t)}{\Delta T} = Y(t)(\pi r)^{-1}\sqrt{2}\cos(\pi ah^{-1}x)\sin(\pi h^{-1}z) - Z(t)(\pi r)^{-1}\sin(2\pi h^{-1}z). \quad (20)$$

Dans la visualisation de l'écoulement, c'est cette température réduite qui est représentée.

Le champ de température s'écrit donc

$$T(x, z, t) = T_B - \Delta T \frac{z}{h} + Y(t) \frac{\Delta T \sqrt{2}}{\pi r} \cos(\pi ah^{-1}x)\sin(\pi h^{-1}z) - Z(t) \frac{\Delta T}{\pi r} \sin(2\pi h^{-1}z). \quad (21)$$

11 Annexe : Biographique Lorenz



Edward Norton Lorenz est un scientifique américain né le 23 mai 1917 à West Hartford, dans le Connecticut.

"Travaillant comme météorologue au MIT, il découvre en 1963 que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté. Il montre donc qu'une dynamique très complexe peut apparaître dans un système formellement très simple. L'appréhension des rapports du simple et du complexe s'en trouve profondément bouleversée. En particulier, on s'aperçoit que la complexité peut être intrinsèque à un système, alors que jusque-là on la rapportait plutôt à un caractère extrinsèque, accidentel, lié à une multitude de causes.

Chez Lorenz, l'intervention de l'ordinateur est cruciale. La sensibilité aux conditions initiales est en effet révélée par le biais de l'instabilité d'un calcul numérique et c'est en 1972 qu'Edward Lorenz présente l'effet papillon devant l'Association Américaine pour le progrès des Sciences avec une célèbre question : "Le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas?"

Mais, surtout, Lorenz exhibe sur son écran d'ordinateur l'image surprenante de son attracteur. Dans ses travaux de mécanique céleste, Henri Poincaré en avait eu l'intuition, mais il l'avait évoqué par des phrases obscures. Lorenz, lui, explique sa construction par des procédures itératives et la donne à voir.

Il faudra ensuite près de quinze ans pour que ces résultats soient compris et assimilés par des groupes scientifiques différents, des météorologues aux mathématiciens, des astronomes aux physiciens, aux biologistes des populations, etc." (source Wikipedia)

D'autres équations modèles ont été proposé par Lorenz (1995). En particulier, celles introduite en 1995 au séminaire du Centre Européen (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts). Le système proposé est alors de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_{i-2}x_{i-1} + x_{i-1}x_{i+1} - x_i + F, \quad (22)$$

avec $i = 1, 2, \dots, 40$ et des conditions limites cyclique : $x_0 = x_{40}$, $x_{-1} = x_{39}$ et $x_{41} = x_1$. L'amplitude du forçage est fixée à $F = 8$.

Références

- F. Bouttier. 1993 The dynamics of error covariances in a barotropic model. *Tellus*, **45A**, 408–423.
- P. Courtier, J.N. Thepaut, and A. Hollingsworth 1994 A strategy for operational implementation of 4D-Var, using and incremental approach. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **120**, 1367–1387.
- P. Courtier, E. Andersson, W. Heckley, J. Pailleux, D. Vasiljević, M. Hamrud, A. Hollingsworth, F. Rabier and M. Fisher. 1998 The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). I : Formulation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **124**, 1783–1807.
- R. Daley. 1991 *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge University Press.
- G .Evensen. 1994 Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error. *J. Geophys. Res.*, **99**
- M. Farge 1988 L'approche numerique : simulation ou simulacre des phenomenes? 'Logos et Theorie des Catastrophes', ed. Jean Petitot, Patino, 119-139.
- M. Fisher and P. Courtier. 1995 Estimating the covariance matrices of analysis and forecast error in variational data assimilation. ECMWF Technical Memorandum, **220**
- C. Letellier 2006 Le chaos dans la nature. Vuibert. 276pp
- E. Lorenz 1963 Deterministic nonperiodic flow. *J. Atms. Sci.* **20**,130–141.
- E. Lorenz 1995 Predictability : A problem partly solved. In *Seminar on Predictability*, volum Vol. I, ECMWF, Reading, UK,1–18.
- P. Manneville 2004 Instabilités, Chaos et Turbulence. Edition de l'École Polytechnique.
- O. Pannekoucke, L. Berre and G. Desroziers 2007 Filtering properties of wavelets for the local background error correlations. To appear in *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*
- Y. Pomeau and P. Manneville 1980 Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.* **74**, 184–197
- R. Robert 2001 L'effet papillon n'existe plus! - Pour la Science N° 283 - Mai 2001.
- R. Robert 2003 La météorologie : un système complexe? - Pour la Sience N° 314 - décembre 2003
- R. Robert and J. Sommeria 1991 Statistical equilibrium states for two-dimensional flows, in. *J. Fluid Mech.*, vol. **229**, pp. 291–310.
- C. Sparrow 1982 The Lorenz Equations : bifurcation, chaos and strange attractors. Springer Verlag New York Inc. 276pp
- F. Takens 1981 Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical systems and turbulence*, D.A. Rand, L.S. Young, eds., Lect. Notes in Mathematics **898** (springer, 1981) pp. 366–381.